

Über den Homotopietyp der Automorphismengruppe einer von Neumann'schen Algebra

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde
des

Fachbereichs Mathematik
der Philipps-Universität
Marburg/Lahn

vorgelegt von
Wolfgang Willgerodt
aus Göttingen

Marburg/Lahn 1977

Über den Homotopietyp der Automorphismengruppe einer von Neumann'schen Algebra

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

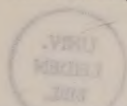
der Philipps-Universität

Marburg/Lahn

vorgelegt von

Wolfgang Willgerodt

aus Göttingen



Marburg/Lahn 1977

Vom Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität
Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am 5.12.1977

Tage der mündlichen Prüfung am 12.12.1977 und 19.12.1977

Berichterstatter: Prof.Dr. M. Breuer

Mitberichterstatter: Prof. Dr. W. Gromes

Prof. Dr. G. Ludwig



Inhaltsverzeichnis

Einleitung		I
§ 1	Bezeichnungen und Beweisübersicht	1
§ 2	Einige Hilfssätze über die Existenz spezieller Projektionen	7
§ 3	Verformung von $f(K)$ nach $\pi_{1,G;E,E}^{\circ}$	13
§ 4	Verformung von $\pi_{1,G;E,E}^{\circ}$ nach $\mathcal{G}_{E,E}$	23
§ 5	Verformung von $\mathcal{G}_{E,E}$ nach $\text{Id}_{\mathcal{M}}$	32
§ 6	Beweise von Theorem 1 und Theorem 2	50

Literaturverzeichnis

Einleitung

N. Kuiper [15] hat 1964 bewiesen, daß in einem reellen, komplexen oder quaternionalen separablen Hilbertraum die Gruppe der regulären Elemente $G(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ zusammenziehbar ist in der Normtopologie.

Dieses Ergebnis ist seitdem in zwei verschiedenen Richtungen verallgemeinert bzw. ergänzt worden.

Erstens betrachte man statt $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ bestimmte Unteralgebren von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und zwar bestimmte von Neumann'sche Algebren $\mathcal{M}$ und deren Gruppe der regulären Elemente G .

M. Breuer [3] bewies 1970 die Zusammenziehbarkeit der regulären Gruppen von Neumann'scher Algebren vom Typ I_∞ und II_∞ unter einer bestimmten Abzählbarkeitsbedingung an die von Neumann'sche Algebra.

Von Singer (unveröffentlicht) stammt ein Beweis der entsprechenden Aussage für abzählbar zerlegbare Faktoren vom Typ III. *

Daß diese Resultate alle auch ohne die Forderung einer Abzählbarkeitsbedingung an die von Neumann'sche Algebra richtig sind, wurde 1976 von J. Brüning und W. Willgerodt [4] bewiesen.

Alle diese Ergebnisse sind Verallgemeinerungen der ursprünglichen Kuiper'schen Arbeit.

Die zweite Richtung der Verallgemeinerungen bzw. Ergänzung des Kuiper'schen Ergebnisses war diese, daß man statt der regulären Gruppe auf einem Hilbertraum die Gruppe der regulären Elemente $G(\mathcal{B}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{B})$ eines Banachraumes $\mathcal{B}$ betrachte. Hier bewiesen zunächst D. Arlt [2] 1966 für c_0 -den Raum aller gegen Null konvergierenden Folgen in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ - und G. Neubauer [20] 1967 für l_p ($1 \leq p < \infty$) und c_0 ebenfalls die Zusammenziehbarkeit der Automorphismengruppen auf diesen Räumen.

* Dieser Beweis wurde in meiner Diplomarbeit 1974 für abzählbar zerlegbare Algebren vom Typ III ausgearbeitet.

Aber auch schon 1965 zeigte A. Douady [7], daß es unendlich-dimensionale Banachräume gibt, deren Automorphismengruppe nicht zusammenziehbar ist. Er bewies, daß für einen Banachraum E $\mathcal{G}(E)$ nicht zusammenziehbar ist, falls $E = F \oplus G$ wobei F, G Banachräume sind mit $\mathcal{L}(F, G) = \mathcal{L}_c(F, G)$. Dabei ist $\mathcal{L}_c(F, G)$ der Normabschluß der Menge der Elemente mit endlichem Rang in $\mathcal{L}(F, G)$.

Es folgten 1970 Arbeiten von I. Edelstein, B. Mitjagin, E. Semenov [10] I. Edelstein und B. Mitjagin [18] und B. Mitjagin [19], in denen die Zusammenziehbarkeit der Automorphismengruppe für weitere große Klassen von Banachräumen bewiesen wurde und in denen auch weitere Klassen von Banachräumen angegeben wurden, deren Automorphismengruppen nicht zusammenziehbar sind.

Eine besonders umfangreiche und umfassende Darstellung über die Zusammenziehbarkeit der Automorphismengruppen von Banachräumen stellt die Arbeit von B. Mitjagin [19] dar.

In dieser Arbeit hat B. Mitjagin das Beweisschema der ursprünglichen Arbeit von N. Kuiper, das in mehr oder weniger abgewandelter Form in allen genannten Arbeiten über die Zusammenziehbarkeit der Automorphismengruppe benützt wird, herausgearbeitet und die Anwendbarkeit dieses Beweisschemas auf die Erfüllbarkeit zweier Bedingungen an die Banachräume zurückgeführt. Diese Bedingungen sind allerdings nur hinreichend aber nicht notwendig für die Anwendbarkeit des Kuiper'schen Beweisschemas. Die Bedingungen, die für den Banachraum B erfüllbar sein müssen, sind Forderungen an die Existenz von gewissen Projektionsoperatoren in $\mathcal{L}(B)$. B. Mitjagin bezeichnet diese Bedingungen mit:

S O B : Hinreichende Kleinheit von Operatorblocks

I D : Unendliche Zerlegbarkeit des Banachraumes

In kurzen Worten besagen diese Bedingungen folgendes:

Ein Banachraum B hat die Eigenschaft S O B, wenn es zu beliebigen $\varepsilon > 0$ und Kompaktum $K \subset \mathcal{L}(B)$ Projektionsoperatoren $q_1, q_2 \in \mathcal{L}(B)$ gibt mit:

$$q_1 q_2 = q_2 q_1 = 0; \quad q_1(B) \cong q_2(B) \cong B; \quad \bigwedge_{\phi \in K} \|q_1 \cdot \phi \cdot q_2\| < \varepsilon.$$

Ein Banachraum B hat die Eigenschaft I D, wenn es eine abzählbare orthogonale Familie $\{Q_i\}_{i=1,2,\dots}$ von Projektionen gibt derart, daß $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i = 1$ stark und unbedingt konvergiert, wobei $Q_i(B) \cong B$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gelten soll und außerdem noch gewisse Stetigkeitseigenschaften für Verschiebungen entlang der durch $\{Q_i\}$ gegebenen Diagonalen und für die Einschränkung auf diese Diagonale erfüllt sein sollen.

Es scheint, daß die Erfüllbarkeit der Bedingung S O B notwendig ist für die Durchführbarkeit des Kuiperschen Beweisschemas, denn genau diese Eigenschaft wird in allen genannten Arbeiten auch bewiesen und ihr Beweis stellt im Allgemeinen das Kernstück des Beweises dar.

Die Eigenschaft I D hingegen taucht in der bei B. Mitjagin formulierten Form in den genannten Arbeiten nicht auf und auch B. Mitjagin weist schon darauf hin, daß man diese Bedingung abschwächen kann. Sie sichert zwar die Durchführung eines Eilenberg-Swindel, ist aber nicht notwendig zu seiner Durchführung. Insbesondere ist die Forderung nach der starken Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i$ zu stark.

In den Arbeiten von E. Edelstein, B. Mitjagin und E. Semenov wird neben vielen anderen Banachräumen insbesondere für die Banachräume $L_{\infty}[0,1]$, $L_1[0,1]$, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{L}(\mathcal{H})_*$ (Spurklasse) die Zusammenziehbarkeit der Automorphismengruppe auf diesen Banachräumen bewiesen.

Da diese Räume spezielle von Neumann'sche Algebren bzw. deren Prädualen sind, stellte sich in natürlicher Weise die folgende Frage:

Sei $\mathcal{M}$ von Neumann'sche Algebra und $\mathcal{M}_B$ der $\mathcal{M}$ zugrundeliegende Banachraum.

Ist dann die Gruppe der regulären Elemente $\mathcal{G}(\mathcal{M}_B) \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}_B)$ bzw. $\mathcal{G}(\mathcal{M}_{B*}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}_{B*})$ zusammenziehbar?

In der vorliegenden Arbeit wird diese Frage für den Fall eines abzählbar zerlegbaren Faktors vom Typ III positiv beantwortet, d.h. für eine solche von Neumann'sche Algebra gilt: $\mathcal{G}(\mathcal{M}_B)$ ist zusammenziehbar.

Wie bereits die Eigenschaften S O B und I D zeigen, hängt die Möglichkeit der Durchführbarkeit des Kuiper'schen Beweisschemas ganz entscheidend von der Existenz hinreichend vieler Projektionen in $\mathcal{L}(\mathcal{M}_B)$ mit guten Eigenschaften ab. Es bietet sich im Falle einer von Neumann'schen Algebra an, die Projektionen in $\mathcal{L}(\mathcal{M}_B)$ zu benutzen, die sich mit Hilfe der Projektionen aus $\mathcal{M}$ erzeugen lassen. Es zeigt sich, daß unter den Projektionen in $\mathcal{L}(\mathcal{M}_B)$, die durch Rechts- und Linksmultiplikation der Elemente der von Neumann'schen Algebra mit Projektionen der von Neumann'schen Algebra erzeugt werden, bereits hinreichend viele mit genügend guten Eigenschaften gefunden werden können. Allerdings zeigt sich, daß mit diesen Projektionen die Bedingung I D, und zwar die starke Konvergenz einer Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i = 1$, nicht erfüllt werden kann. Es kann

daher das Mitjaginsche Beweisschema nicht übernommen werden, sondern zur Durchführung des Eilenberg-Swindel wird auf die bei M. Breuer angegebene Homotopie zurückgegriffen. Diese wird allerdings derart abgeändert, daß der Eilenberg-Swindel nicht mehr entlang der ganzen Diagonalen durchgeführt wird sondern nur noch entlang einer unendlichen Teilfolge der Diagonalen (§ 5). Aber auch in dieser Arbeit ist das entscheidende Problem der Nachweis der Eigenschaft S O B (§ 3). Dieser wird durch einen Widerspruchsbeweis erbracht im Gegensatz zu den meisten anderen Nachweisen der Eigenschaft S O B, die konstruktiv geführt werden.

Dieser Teil des Beweises erzwingt auch die Beschränkung des Ergebnisses auf abzählbar zerlegbare Faktoren vom Typ III. Alle anderen Beweisschritte lassen sich durchführen, wenn nur die von Neumann'sche Algebra eigentlich unendlich ist.

Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. M. Breuer danke ich für die Anregung zu diesem schönen Thema und für viele hilfreiche Gespräche und Anregungen.

Herrn Doz. Dr. J. Brüning danke ich für zahlreiche Diskussionen und anregende Gespräche über den Gegenstand der Arbeit.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$ stets eine komplexe von Neumannsche Algebra, die stets auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ dargestellt sein soll.

Wie üblich bezeichnen wir:

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) := \{ \phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \mid \phi \text{ linear und stetig bezüglich der Normtopologie auf } \mathcal{M} \}$$

$$\mathcal{G}(\mathcal{M}) := \{ \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \mid \phi \text{ invertierbar} \}$$

und betrachten $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ unter der von der Norm

$$\bigwedge_{\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M})} \|\phi\| := \sup_{T \in \mathcal{M}, \|T\|=1} \|\phi(T)\| \text{ erzeugten Topologie.}$$

Ferner bezeichnen wir wie üblich:

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}) := \{ E \in \mathcal{M} \mid E^2 = E, E = E^* \}$$

$$\text{Für } E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : E \leq F \iff E \cdot F = F \cdot E = E$$

$$E \sim F \iff \begin{array}{l} \text{Es gibt eine partielle Isometrie} \\ U \in \mathcal{M} \text{ mit } U \cdot U^* = E \text{ und } U^* \cdot U = F \end{array}$$

$$E < F \iff \begin{array}{l} \text{Es gibt } E' \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \quad E \sim E' \leq F \\ \text{Es gibt } F' \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \quad E \leq F' \sim F \end{array}$$

$$c(E) := \inf \{ G \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \mid G \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}) \wedge E \leq G \}$$

$c(E)$ heißt der zentrale Träger von E und er existiert zu jeder Projektion $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Für spezielle, im Folgenden häufig benutzte Typen von Elementen aus $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ definieren wir folgende Bezeichnungen:

Definition 1.1.

Zu jedem $S \in \mathcal{M}$ sei $l_S \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ bzw. $r_S \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ wie folgt

definiert: $\bigwedge_{T \in \mathcal{M}} l_S(T) := S \cdot T$ und $r_S(T) := T \cdot S$

zu $S, T \in \mathcal{M}$ bezeichnen wir abkürzend:

$$\chi_{S,T} := l_S \circ r_T = r_T \circ l_S$$

Im folgenden Hilfssatz stellen wir einige triviale Eigenschaften der so definierten Abbildungen zusammen.

Hilfssatz 1.2.

- 1) $l_S, r_S, \chi_{S,T} \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ mit $\|l_S\| \leq \|S\|, \|r_S\| \leq \|S\|, \|\chi_{S,T}\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$
- 2) $l_S, r_S, \chi_{S,T}$ sind schwach, ultraschwach, stark, ultra-
stark stetig
- 3) Für $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ gilt: $\chi_{E,F} \circ \chi_{E,F} = \chi_{E,F}$
- 4) Für $E_1, E_2, F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ gilt:

$$E_1 \cdot E_2 = 0 \vee F_1 \cdot F_2 = 0 \Rightarrow \chi_{E_1, F_1} \circ \chi_{E_2, F_2} =$$

$$\chi_{E_2, F_2} \circ \chi_{E_1, F_1} = 0$$

$$5) E_1 \leq E_2 \wedge F_1 \leq F_2 \Rightarrow \chi_{E_1, F_1} \circ \chi_{E_2, F_2} = \chi_{E_1, F_1} =$$

$$\chi_{E_2, F_2} \circ \chi_{E_1, F_1}$$

Beweis

- 1) folgt direkt aus der Tatsache, daß $\mathcal{M}$ eine Banachalgebra ist
- 2) folgt direkt aus der Stetigkeit der Multiplikation mit einem festen Element bezgl. der genannten Topologien ([23], 1.3.1)
- 3) bis 5) ergibt sich sofort durch Nachrechnen. ■

In der folgenden Definition fassen wir die Bezeichnungen für einige Untermengen von $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ zusammen, die während der Verformungen in $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ auftreten.

Definition 1.3.

Sei $F, E, G, L \in \mathcal{O}(\mathcal{M})$; dann definieren wir:

$$\Pi_{G, L; F, E}^{\varepsilon} := \{ \Phi \in \mathcal{G}(\mathcal{M}) \mid \| \chi_{G, L} \circ \Phi \circ \chi_{F, E} \| < \varepsilon \}$$

$$\mathcal{G}'_{F, E} := \{ \Phi \in \mathcal{G}(\mathcal{M}) \mid \Phi \circ \chi_{F, E} = \chi_{F, E} \}$$

$$\mathcal{G}_{F, E} := \{ \Phi \in \mathcal{G}(\mathcal{M}) \mid \Phi \circ \chi_{F, E} = \chi_{F, E} \circ \Phi = \chi_{F, E} \}$$

$$\Pi_{G, L; F, E}^{\circ} := \{ \Phi \in \mathcal{G}(\mathcal{M}) \mid \| \chi_{G, L} \circ \Phi \circ \chi_{F, E} \| = 0 \}$$

Der Beweis der Zusammenziehbarkeit von $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ gliedert sich in zwei Schritte.

Theorem 1

Sei $\mathcal{M}$ abzählbar zerlegbarer Faktor vom Typ III.

Dann gilt: $\bigwedge_{i=0,1,2,\dots} \pi_i(\mathcal{G}(\mathcal{M})) = \{0\}$

Der Beweis dieses Theorems ist bei allen Arbeiten über Zusammenziehbarkeit von Automorphismengruppen auf Banachräumen der Teil, bei dem die spezielle Struktur des betrachteten Banachraumes eine entscheidende Rolle spielt. Der Beweis des zweiten Theorems ist bei allen Betrachtungen über die Zusammenziehbarkeit von Automorphismengruppen auf Banachräumen gleich.

Theorem 2

Sei $\mathcal{M}$ von Neumannsche Algebra. Dann gilt:

Gilt für $i=0,1,2,\dots$ $\pi_i(\mathcal{G}(\mathcal{M})) = \{0\}$, so folgt daraus die Zusammenziehbarkeit von $\mathcal{G}(\mathcal{M})$.

Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es daher hauptsächlich, den Beweis für Theorem 1 zu führen. Aus Vollständigkeitsgründen wird aber auch der Beweis von Theorem 2 in § 6 geführt.

Zum Beweis von Theorem 1

Wir haben zu beliebigen $i \in \{0,1,2,\dots\}$ eine beliebige stetige Abbildung $f : S^1 \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ zu betrachten und zu zeigen, daß es eine stetige Abbildung

$F : S^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ gibt derart, daß gilt:

$$\bigwedge_{x \in S^1} F(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad F(x, 1) = \text{Id}$$

Wir betrachten etwas allgemeiner ein beliebiges metrisches Kompaktum K und eine beliebige stetige Abbildung $f : K \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ und zeigen die Existenz einer stetigen Abbildung

$$F : K \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$$

mit den oben genannten Eigenschaften.

Der Beweis der Existenz einer solchen Abbildung F vollzieht sich in mehreren Schritten.

1. Schritt (§ 3)

Zu $f : K \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ Existenz einer stetigen Abbildung

$$F_1 : K \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$$

mit: $\bigwedge_{x \in K} F_1(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad F_1(x, 1) \in \prod_{1, G; E, E}^0$

für geeignet gewählte Projektionen E, G . Es ist wichtig, daß man E, G so wählen kann, daß $E \cdot G = 0$ und $E \sim G \sim 1$ gilt.

2. Schritt (§ 4)

Zu $f : K \longrightarrow \prod_{1, G; E, E}^0$ mit $G \sim E \sim 1$ und $G \cdot E = 0$ Existenz einer stetigen Abbildung

$$F_2 : K \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$$

mit: $\bigwedge_{x \in K} F_2(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad F_2(x, 1) \in \mathcal{G}_{E, E}$

3. Schritt - Eilenberg Swindel (§ 5)

Zu $f : K \longrightarrow G_{E,E}$ mit $E \sim 1$ Existenz einer stetigen
Abbildung

$$F_3 : K \times [0,1] \longrightarrow G(\mathcal{M})$$

mit $\bigwedge_{x \in K} F_3(x,0) = f(x) \quad \text{und} \quad F_3(x,1) = \text{Id}_{\mathcal{M}}$

4. Schritt (§ 6)

Beweis von Theorem 1 mit Hilfe der Homotopien F_1, F_2, F_3

§ 2 Einige Hilfssätze über die Existenz spezieller Projektionen.

Von besonders entscheidender Bedeutung für die Möglichkeit, diesen Beweis zu führen, sind die beiden folgenden Sätze aus der allgemeinen Theorie der von Neumannschen Algebren.

Hilfssatz 2.1.

Sei $\mathcal{M}$ von Neumannsche Algebra, $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ und E eigentlich unendlich.

Dann gibt es eine Folge $(E_i)_{i=1,2,\dots}$ mit:

$$(2.1.) \quad E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{und} \quad \bigwedge_{i,j \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \wedge E_i \sim E \wedge E_i \cdot E_j = \delta_{ij} E_i$$

Beweis:

[6] III, § 8,6; Korollar 2

Bemerkung:

Die Möglichkeit einer solchen Zerlegung ist von entscheidender Bedeutung bei der Durchführung des Eilenberg-Swindel und des Beweises zu Satz 3.1.

Da diese Zerlegung aber nur für eigentlich unendliche Projektionen möglich ist und außerdem zur Angabe der Homotopien F_2 und F_3 noch zusätzlich $E \sim G \sim 1$ benötigt wird, bin ich gezwungen, den folgenden Hilfssatz 2.2. anzuwenden. Dieser erzwingt die Einschränkung der Behauptung auf den Fall eines Faktors vom Typ III.

Hilfssatz 2.2.

Ist $\mathcal{M}$ abzählbar zerlegbarer Faktor vom Typ III, so gilt:

$$(2.2.) \quad E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \implies E \sim F$$

Beweis:

Wende [23] , 2.2.14 an.

Zum Beweis der Existenz von 0 und 1 verschiedener Projektionen E, G in §3 werden die drei folgenden Hilfssätze benötigt.

Hilfssatz 2.3.

Sei $T \in \mathcal{M}^+$ mit $\|T\| \geq t$, $\text{re}(T)$ sei der rechte Träger von T . Dann gilt:

$$(2.3.) \quad \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E \leq \text{re}(T) \text{ und } \bigwedge_{x \in E(\mathcal{H})} \|T(x)\| \geq (t - \varepsilon) \|x\|$$

Beweis:

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben und $\|T\| \geq t$

Mit [27]. XI, 8, Th. 2 gilt:

$$(2.4.) \quad \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda = \|T\| \geq t ; \text{ und damit folgt:}$$

$$(2.5.) \quad \bigvee_{\lambda' \in \sigma(T)} \|T\| \geq \lambda' > t - \frac{\varepsilon}{2}$$

Mit [27]. XI, 8, Th. 1 folgt weiter für $\delta > 0$:

$$(2.6.) \quad E_{\|T\| + \delta} - E_{\lambda' - \frac{\varepsilon}{2}} =: E' - E'' \neq 0$$

Dabei sind $E_{\|T\|+\delta}$ und $E_{\lambda' - \frac{\varepsilon}{2}}$ die zu $\|T\|+\delta$ bzw. $\lambda' - \frac{\varepsilon}{2}$ gehörigen Spektralprojektionen. Insbesondere gilt also auch:

$$(2.7.) \quad E' - E'' \leq \operatorname{re}(T) \quad \text{und} \quad (E' - E'') \cdot T = T \cdot (E' - E'')$$

Nach dem Spektralsatz für positive hermitesche Operatoren gilt für $\delta > 0$ und jede Zerlegung

$$-\delta = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n = \|T\| + \delta.$$

$$(2.8.) \quad \sum_{i=1}^n \mu_{i-1} (E_{\mu_i} - E_{\mu_{i-1}}) \leq \int_{-\delta}^{\|T\|+\delta} \lambda \, dE_{\lambda} = T$$

Insbesondere gilt diese Ungleichung für die spezielle Zerlegung: $-\delta = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \lambda' - \frac{\varepsilon}{2} < \|T\| + \delta$

Da Ungleichungen bei Multiplikation mit positiven vertauschbaren Elementen erhalten bleiben, folgt wegen (2.7.) durch Multiplikation von (2.8.) mit $E' - E''$:

$$(2.9.) \quad (\lambda' - \frac{\varepsilon}{2}) \cdot (E' - E'') \leq T \cdot (E' - E'')$$

In der Hilbertraumdarstellung ist diese Aussage äquivalent zu:

$$(2.10.) \quad \bigwedge_{x \in \mathcal{H}} ((\lambda' - \frac{\varepsilon}{2})(E' - E'')(x), x) \leq (T \cdot (E' - E'')(x), x)$$

Da für $x \in (E' - E'')(\mathcal{H})$ $(E' - E'')(x) = x$ gilt, folgt aus

(2.10.)

$$(2.11.) \quad \bigwedge_{x \in (E' - E'')(\mathcal{H})} ((\lambda' - \frac{\varepsilon}{2})x, x) \leq (Tx, x) \\ \Rightarrow \bigwedge_{x \in (E' - E'')(\mathcal{H})} (\lambda' - \frac{\varepsilon}{2}) \|x\|^2 \leq \|Tx\| \cdot \|x\|$$

Wegen (2.5.) folgt daraus:

$$(2.12.) \quad \bigwedge_{x \in (E' - E'')} \left\{ \begin{matrix} t - \varepsilon \\ \mathcal{H} \end{matrix} \right\} \|x\| < (\lambda' - \varepsilon) \|x\| \leq \|T(x)\|$$

Mit $E := E' - E''$ und wegen (2.7.) folgt damit die Behauptung. ■

Der folgende Hilfssatz zeigt, daß diese Aussage nicht nur für positive Elemente sondern für jedes Element einer von Neumannschen Algebra richtig ist.

Hilfssatz 2.4.

Sei $T \in \mathcal{M}$ mit $\|T\| \geq t$. Dann gilt:

$$(2.13.) \quad \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E \leq \operatorname{re}(T) \quad \text{und} \quad \bigwedge_{x \in E(\mathcal{H})} \|T(x)\| \geq (t - \varepsilon) \|x\|$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\|T\| \geq t$.

Mit der Polarzerlegung zerlegen wir: $T = U_T \cdot |T|$ und erhalten:

$$(2.14.) \quad \| |T| \| = \| U_T \| \cdot \| |T| \| \geq \| U_T \| \cdot \| T \| = \| T \| \geq t$$

Also gilt auch: $\| |T| \| \geq t$. Mit Hilfssatz 2.3. folgt:

$$\bigvee_{E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E \leq \operatorname{re}(|T|) \quad \text{und} \quad \bigwedge_{x \in E(\mathcal{H})} \| |T|(x) \| \geq (t - \varepsilon) \| x \|$$

Da $|T|(x) \in \operatorname{re}(T)(\mathcal{H})$ und $U_T|_{\operatorname{re}(T)(\mathcal{H})}$ Isometrie ist, folgt:

$$(2.15.) \quad \| T(x) \| = \| U_T \cdot |T|(x) \| = \| U_T(|T|(x)) \| = \| |T|(x) \|$$

und damit:

$$(2.16.) \quad \bigvee_{E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E \leq \operatorname{re}(|T|) \quad \text{und} \quad \bigwedge_{x \in E(\mathcal{H})} \| T(x) \| \geq (t - \varepsilon) \| x \|$$

Wegen $\operatorname{re}(|T|) = \operatorname{re}(T)$ folgt damit die Behauptung. ■

Hilfssatz 2.5.

Sei $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{H}$ eine beliebige endliche Teilmenge eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Sei S die Menge der Funktionen auf $\{x_1, \dots, x_n\}$, die nur die Werte $\{+1, -1\}$ annehmen kann. Dann kann man durch Wahl einer geeigneten Funktion $\sigma \in S$ erreichen, daß gilt:

$$(2.17.) \quad \left\| \sum_{i=1}^n \sigma(x_i) x_i \right\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

Beweis:

Der Beweis wird durch Induktion über n geführt.

1) Sei $n = 2$

Dann gilt: $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x_1, x_2)$

Wähle:

$$(2.18.) \quad \sigma(x_1) := 1, \quad \sigma(x_2) := \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(x_1, x_2))$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \left\| \sigma(x_1) \cdot x_1 + \sigma(x_2) \cdot x_2 \right\|^2 &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \sigma(x_2) \cdot 2 \operatorname{Re}(x_1, x_2) \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \left[\operatorname{sign}(\operatorname{Re}(x_1, x_2)) \right]^2 \\ &\quad \cdot 2 |\operatorname{Re}(x_1, x_2)| \\ &\geq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \end{aligned}$$

2) Sei die Behauptung für $n-1$ bewiesen.

Man kann also zu jeder $(n-1)$ -elementigen Teilmenge von $\mathcal{H}$ eine geeignete Funktion σ finden, so daß:

$$(2.19.) \quad \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(x_i) x_i \right\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|^2 \quad \text{gilt.}$$

Sei nun $\{x_1, \dots, x_n\}$ gegeben.

Wähle: Zu $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ $\sigma(x_1)$ so, daß (2.19.) gilt.

(2.20.) Zu x_n : $\sigma(x_n) := \text{sign} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(x_i) x_i, x_n \right) \right]$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \sigma(x_i) x_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(x_i) \cdot x_i \right\|^2 + \left\| \sigma(x_n) \cdot x_n \right\|^2 \\ &\quad + 2 \cdot \text{Re} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(x_i) \cdot x_i, \sigma(x_n) \cdot x_n \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|^2 + \|x_n\|^2 + 2 \left[\text{sign} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(x_i) \cdot x_i, x_n \right) \right] \right]^2 \\ &\quad \cdot \left| \text{Re} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(x_i) \cdot x_i, x_n \right) \right| \\ &\geq \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für jede endliche Teilmenge nachgewiesen. ■

§ 3 Verformung von $f(K)$ nach $\pi_{1,G;E,E}^o$

Die Durchführung dieser Verformung (Schritt 1) ist bei allen Beweisen für Zusammenziehbarkeit von Automorphismengruppen der Teil des Beweises, der die Hauptschwierigkeiten beinhaltet. Alle anderen Schritte sind in mehr oder weniger abgewandelter Form die gleichen wie in der ersten Arbeit dieses Typs von N. Kuiper.

Das Ziel dieses §3 ist der folgende Satz.

Satz 3.1.

Sei $\mathcal{M}$ eigentlich unendliche von Neumannsche Algebra, K kompakter topologischer Raum, $f : K \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ stetig. Dann gibt es Projektionen E, G mit $E \sim 1$, $GE = 0$, $G \neq 0$ und eine Abbildung

$$F_1 : K \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M}) \quad \text{mit}$$

$$1) \quad F_1(k, 0) = f(k) \quad \text{für alle } k \in K$$

$$2) \quad F_1(k, 1) \in \pi_{1,G;E,E}^o \quad \text{für alle } k \in K$$

Der Beweis dieses Satzes gliedert sich wie folgt:

1) Zu $\varepsilon > 0$ und beliebiger endlicher Teilmenge

$\{\phi_1, \dots, \phi_m\} \subset \mathcal{G}(\mathcal{M})$ Existenz von Projektionen G, E mit:

$$(3.1.) \quad \|\chi_{1,G} \circ \phi_1 \circ \chi_{E,E}\| < \varepsilon \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\iff \phi_1 \in \pi_{1,G;E,E}^\varepsilon \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, m$$

(Hilfssatz 3.2. und 3.3. und 3.4.)

- 2) Zu $\varepsilon > 0$ und beliebigem kompakten $\tilde{K} \subset \mathcal{G}(\mathcal{M})$ Überdeckung durch $\frac{\varepsilon}{2}$ -Kugeln von $\tilde{K}$ mit der Folge:

$$(3.2.) \quad \|\chi_{1,G} \circ \phi \circ \chi_{E,E}\| < \varepsilon \quad \text{für } \phi \in \tilde{K}.$$

Beweis von Satz 3.1.

- 3) Angabe einer Homotopie: $F_1 : K \times [0,1] \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ mit

$$(3.3.) \quad \begin{aligned} F_1(k,0) &\in \Pi_{1,G;E,E}^{\varepsilon} & \text{für } k \in K \\ F_1(k,1) &\in \Pi_{1,G;E,E}^0 & \text{für } k \in K \end{aligned}$$

für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.

(Hilfssatz 3.5.)

Zu 1

Zunächst wird der folgende einfache Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 3.2.

Sei $\phi \in \mathcal{G}(\mathcal{M})$, $(A_i)_{i=1,2,\dots}$ eine Folge in $\mathcal{M}$ mit $\|A_i\| = 1$ für $i \in \mathbb{N}$, $(G_i)_{i=1,2,\dots}$ eine Folge in $\mathcal{O}(\mathcal{M})$, $(E_i)_{i=1,2,\dots}$ eine Folge von paarweise orthogonalen Projektionen in $\mathcal{M}$.

Dann gilt:

$$(3.4.) \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n \chi_{1,G_i} \circ \phi \circ \chi_{E_i,E_i}(A_i) \right\| < \|\phi\|$$

Bemerkung:

Der Beweis von Satz 3.1. wird durch Widerspruch geführt und zwar ist Hilfssatz 3.2. gerade die Aussage, zu der ein Widerspruch hergestellt wird.

Beweis:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \chi_{1, G_n} \circ \phi \circ \chi_{E_1, E_1}(A_i) \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \phi(E_1 A_i E_1) \right\| \\ &\leq \|\phi\| \cdot \sum_{i=1}^n \|E_1 A_i E_1\| \leq \|\phi\| \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n E_1 A_i E_1 \right\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^n \|E_1 A_i E_1(x)\|^2 \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^n \|E_1(x)\|^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Damit kann nun der entscheidende Hilfssatz bewiesen werden.

Hilfssatz 3.3.

Sei $\phi \in \mathcal{G}(\mathcal{M})$, $G' \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $(E_i)_{i=1,2,\dots}$ eine Folge von paarweise orthogonalen Projektionen in $\mathcal{M}$.

Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $i \in \mathbb{N}$, $G \leq G'$, $G \neq 0$ derart, daß

$$\left\| \chi_{1, G} \circ \phi \circ \chi_{E_i, E_i} \right\| < \varepsilon$$

Beweis:

Der Beweis wird durch Widerspruch geführt.

Annahme:

$$(3.5.) \quad \bigvee_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} \bigwedge_{G \leq G'} \|\chi_{1,G} \circ \phi \circ \chi_{E_1, E_1}\| \geq \varepsilon$$

a) Ich werde nun aus (3.5.) zunächst die folgende Aussage herleiten

$$(3.6.) \quad \bigvee_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{(A_1)_{i=1, \dots, n} \in \mathcal{M}, \|A_1\| = 1; G_n \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), G_n \leq G'} \bigwedge_{\substack{x \in G_n(\mathcal{H}) \\ \|x\|=1}} \bigwedge_{i=1}^n \|\chi_{1, G_n} \circ \phi \circ \chi_{E_1, E_1}(A_1)(x)\| \geq \frac{\varepsilon}{3}$$

Dabei ist das $\varepsilon > 0$ eine der nach Annahme (3.5) existierenden Zahlen.

(3.6.) wird durch Induktion bewiesen.

Sei also $n = 1$

Nach (3.5.) gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\|\chi_{1, G'} \circ \phi \circ \chi_{E_1, E_1}\| \geq \varepsilon$

Damit folgt:

$$(3.7.) \quad \bigvee_{A_1 \in \mathcal{M}, \|A_1\|=1} \|\phi(E_1 \cdot A_1 \cdot E_1) \cdot G'\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

Mit Hilfssatz 2.4. folgt daraus

$$(3.8.) \quad \bigvee_{A_1 \in \mathcal{M}, \|A_1\|=1} \bigvee_{G_1 \leq G'} \bigwedge_{x \in G_1(\mathcal{H})} \|\phi(E_1 A_1 E_1) \cdot G_1(x)\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \|x\|$$

Damit ist 3.6. für $n=1$ bewiesen.

Sei nun 3.6. für $n-1$ bewiesen.

Das heißt: Für ein nach (3.5.) existierendes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$(3.9.) \quad \bigvee_{(A_i)_{i=1, \dots, n-1}, \|A_i\|=1, A_i \in \mathcal{M}, G_{n-1} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), G_{n-1} \leq G'} \bigvee_{\substack{x \in G_{n-1}(\mathcal{H}) \\ \|x\|=1}} \bigwedge_{i=1}^{n-1} \|\chi_{1, G_{n-1}} \circ \Phi \cdot \chi_{E_1, E_1}(A_i)(x)\| \geq \frac{\varepsilon}{3}$$

Ich betrachte nun die Abbildung $\chi_{1, G_{n-1}} \circ \Phi \cdot \chi_{E_n, E_n}$

Dann folgt aus der Annahme (3.5.) für das gleiche $\varepsilon > 0$ wie oben:

$$\|\chi_{1, G_{n-1}} \circ \Phi \cdot \chi_{E_n, E_n}\| \geq \varepsilon$$

Wieder folgt:

$$(3.10.) \quad \bigvee_{A_n \in \mathcal{M}, \|A_n\|=1} \|\phi(E_n \cdot A_n \cdot E_n) \cdot G_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

und mit Hilfssatz 2.4.

$$(3.11.) \quad \bigvee_{A_n \in \mathcal{M}, \|A_n\|=1} \bigvee_{G_n \leq G_{n-1}} \bigwedge_{x \in G_n(\mathcal{H})} \|\phi(E_n A_n E_n) \cdot G_n(x)\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \|x\|$$

Damit habe ich Elemente A_n, G_n gefunden.

Es bleibt zu zeigen, daß die Elemente $A_1, \dots, A_n, G_n$ tatsächlich die Behauptung (3.6.) erfüllen.

Nach Konstruktion gilt zunächst $\|A_i\|=1$ für $i=1, \dots, n$ und $G_n \leq G_{n-1} \leq G'$. Sei nun $x \in G_n(\mathcal{H})$ mit $\|x\|=1$

Für $i=n$ gilt die Behauptung wegen (3.11.).

Für $i < n$ folgt wegen $G_n \leq G_{n-1}$:

$$x \in G_n(\mathcal{H}) \implies x \in G_{n-1}(\mathcal{H}) \quad \text{und damit:}$$

$$x \in G_n(\mathcal{H}) \implies G_n(x) = G_{n-1}(x)$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt damit für $x \in G_n(\mathcal{H})$:

$$\| \chi_{1, G_n} \phi \cdot \chi_{E_1, E_1}(A_1)(x) \| = \| \chi_{1, G_{n-1}} \phi \cdot \chi_{E_1, E_1}(A_1)(x) \| \geq \frac{\varepsilon}{3}$$

Also ist (3.6.) auch für n bewiesen und damit überhaupt.

Ich werde nun für ein nach (3.5.) existierendes festes $\varepsilon > 0$ aus (3.6.) die folgende Aussage herleiten:

$$(3.12.) \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{G_n \leq G' (B_1^n)} \bigvee_{i=1, \dots, n} \bigvee_{c \in \mathcal{M}, \|B_1^n\|=1} \left\| \sum_{i=1}^n \chi_{1, G_n} \phi \cdot \chi_{E_1, E_1}(B_1^n) \right\| \geq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \sqrt{n}$$

Diese Ungleichung steht aber im Widerspruch zu Hilfssatz 3.2., nach dem jede dieser Summen durch $\| \phi \|$ beschränkt ist. Aus der Annahme (3.5.) folgt also zunächst (3.6.). Sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest und $x \in G_n(\mathcal{H})$ mit $\|x\| = 1$ fest.

Sei ferner $S_n = \{ \sigma_n \mid \sigma_n : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\} \}$.

Dann gibt es nach Hilfssatz 2.5. ein $\sigma_n \in S_n$ derart, daß für $A_1, \dots, A_n, G_n$ aus 3.6. die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \chi_{1, G_n} \phi \cdot \chi_{E_1, E_1}(\sigma_n(i) \cdot A_1)(x) \right\|^2 &= \\ \left\| \sum_{i=1}^n \sigma_n(i) \cdot \chi_{1, G_n} \phi \cdot \chi_{E_1, E_1}(A_1)(x) \right\|^2 & \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \left\| \chi_{1, G_n} \phi \cdot \chi_{E_1, E_1}(A_1)(x) \right\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{9} = n \frac{\varepsilon^2}{9}$$

Mit $B_1^n := \sigma_n(1) \cdot A_1$ folgt damit 3.12.

Damit ist die Annahme (3.5.) zum Widerspruch geführt und also Hilfssatz 3.3. bewiesen. ■

Damit bin ich nun in der Lage, den folgenden entscheidenden Hilfssatz zu beweisen.

Hilfssatz 3.4.

Sei $\mathcal{M}$ eigentlich unendliche von Neumannsche Algebra.

$\{\phi_1, \dots, \phi_m\} \subset \mathcal{G}(\mathcal{M})$ endlich.

Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ Projektionen E, G mit folgenden Eigenschaften:

$$(3.13.) \quad E \cdot G = 0; \quad E \sim 1; \quad \bigwedge_{i=1, \dots, m} \|\chi_{1,G} \cdot \phi_i \cdot \chi_{E,E}\| < \varepsilon$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Ich führe den Beweis durch Induktion über m .

Sei $m = 1$.

Da $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich ist, gibt es mit Hilfssatz 2.1.

eine Folge von Projektionen $(E_i)_{i=0,1,2,\dots}$ mit :

$$E_i E_j = \delta_{ij} E_i \quad \text{für } i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad E_i \sim 1 \text{ für } i=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{und} \quad \sum_{i=0}^{\infty} E_i = 1$$

Ich setze $G' := E_0$ und wende Hilfssatz 3.3. an.

Damit folgt:

$$(3.14.) \quad \bigvee_{G \leq G'} \bigvee_{i_0 \in \mathbb{N}} \|\chi_{1,G} \cdot \phi_1 \cdot \chi_{E_{i_0}, E_{i_0}}\| < \varepsilon$$

Wegen $G \cdot E_{i_0} = 0$ und $E_{i_0} \sim 1$ ist damit die Behauptung

für $m = 1$ bewiesen.

Sei die Behauptung für $m - 1$ bewiesen.

Seien also bereits $\tilde{G}, \tilde{E}$ gefunden mit $\tilde{G} \cdot \tilde{E} = 0$, $\tilde{E} \sim 1$ und

$$(3.15.) \quad \bigwedge_{i=1}^{m-1} \|\chi_{1, \tilde{G}} \cdot \phi_i \cdot \chi_{\tilde{E}, \tilde{E}}\| < \varepsilon$$

Nach Hilfssatz 2.1. gibt es wieder eine Folge von Projektionen

$(F_j)_{j=1,2,\dots}$ mit $F_i \cdot F_j = \delta_{ij} F_j$ für $i, j \in \mathbb{N}$, $F_j \sim \tilde{E} \sim 1$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\tilde{E} = \sum_{j=1}^{\infty} F_j$. Erneute Anwendung von Hilfssatz 3.3.

liefert für ϕ_m die Existenz eines $j_0 \in \mathbb{N}$ und einer Projektion $G \leq \tilde{G}$ mit:

$$(3.16.) \quad \|\chi_{1, G} \cdot \phi_m \cdot \chi_{F_{j_0}, F_{j_0}}\| < \varepsilon, \quad G \cdot F_{j_0} = 0, \quad F_{j_0} \sim 1$$

Ich setze $E := F_{j_0}$ und habe die gesuchten Projektionen für ϕ_m gefunden. Bleibt zu zeigen:

$$(3.17.) \quad \bigwedge_{i=1, \dots, m-1} \|\chi_{1, G} \cdot \phi_i \cdot \chi_{E, E}\| < \varepsilon$$

Wegen $G \cdot \tilde{G} = G$ und $E \cdot \tilde{E} = E$ gilt aber für $i=1, \dots, m-1$ nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} \|\chi_{1, G} \cdot \phi_i \cdot \chi_{E, E}\| &= \sup_{\|T\|=1} \|\phi_i(E \cdot T \cdot E) \cdot G\| \\ &= \sup_{\|T\|=1} \|\phi_i(\tilde{E} \cdot E \cdot T \cdot E \cdot \tilde{E}) \cdot \tilde{G} \cdot G\| \\ &\leq \sup_{\|T\|=1, T \in \mathcal{M}_E} \|\phi_i(\tilde{E} \cdot T \cdot \tilde{E}) \cdot \tilde{G}\| \\ &\leq \sup_{\|T\|=1} \|\phi_i(\tilde{E} \cdot T \cdot \tilde{E}) \cdot \tilde{G}\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist (3.17.) erfüllt und zusammen mit (3.16.) folgt die Behauptung für jede endliche Teilmenge. ■

Zu 2)

Ich will nun zeigen, daß man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und einer kompakten Teilmenge $\tilde{K}$ von $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ Projektionen E, G finden kann, derart, daß $\tilde{K} \subset \prod_{1, G; E, E}^\varepsilon$ gilt.

Hilfssatz 3.5.

Sei $\mathcal{M}$ eigentlich unendliche von Neumannsche Algebra $\tilde{K} \subset \mathcal{G}(\mathcal{M})$ kompakt. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ $E, G \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit:

$$(3.18.) \quad E \sim 1, EG = 0, \bigwedge_{\phi \in \tilde{K}} \|\chi_{1, G} \phi \cdot \chi_{E, E}\| < \varepsilon$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Ich wähle eine endliche Überdeckung durch $\frac{\varepsilon}{2}$ - Kugeln mit Mittelpunkten $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ von $\tilde{K}$.

Nach Hilfssatz 3.4. existieren zu $\frac{\varepsilon}{2}$ und $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$

$$E, G \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \quad \text{mit} \quad E \sim 1, G \cdot E = 0 \quad \text{und} \quad \bigwedge_{i=1, \dots, m} \|\chi_{1, G} \phi_i \cdot \chi_{E, E}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei nun $\phi \in \tilde{K}$. Dann gibt es ein $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ mit $\|\phi - \phi_{i_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \|\chi_{1, G} \phi \cdot \chi_{E, E}\| &= \|\chi_{1, G} \cdot (\phi - \phi_{i_0}) \cdot \chi_{E, E} + \chi_{1, G} \phi_{i_0} \cdot \chi_{E, E}\| \\ &\leq \|\chi_{1, G} \cdot (\phi - \phi_{i_0}) \cdot \chi_{E, E}\| + \|\chi_{1, G} \phi_{i_0} \cdot \chi_{E, E}\| \\ &\leq \|\chi_{1, G}\| \cdot \|\phi - \phi_{i_0}\| \cdot \|\chi_{E, E}\| + \|\chi_{1, G} \phi_{i_0} \cdot \chi_{E, E}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

Zu 3)

Beweis von Satz 3.1.

Sei also $f : K \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ stetig. Damit ist $\{\|f(k)\| \mid k \in K\}$ kompakt und es gibt $\varepsilon > 0$ mit:

$$(3.19.) \quad \bigwedge_{k \in K} \|f(k)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(k)^{-1}\| \leq \frac{1}{\|f(k)\|}$ folgt damit:

$$(3.20.) \quad \bigwedge_{k \in K} \|f(k)^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Da $f(K)$ kompakt ist, gibt es nach Hilfssatz 3.4. Projektionen E, G mit $E \sim 1$, $E \cdot G = 0$ und

$$(3.21.) \quad \bigwedge_{k \in K} \|\chi_{1,G} \circ f(k) \circ \chi_{E,E}\| < \varepsilon$$

Ich setze:

$$(3.22.) \quad F_1(t, k) := f(k) - t \cdot \chi_{1,G} \circ f(k) \circ \chi_{E,E}$$

Dann gilt:

$$a) \quad \bigwedge_{k \in K} F_1(0, k) = f(k)$$

$$b) \quad \bigwedge_{k \in K} \|\chi_{1,G} \circ F_1(1, k) \circ \chi_{E,E}\| \\ = \|\chi_{1,G} \circ f(k) \circ \chi_{E,E} - \chi_{1,G} \circ f(k) \circ \chi_{E,E}\| = 0$$

$$\text{Also: } \bigwedge_{k \in K} F_1(1, k) \in \prod_{1, G, E, E}^0$$

- c) die Stetigkeit von F_1 ergibt sich aus der Stetigkeit der Operationen in $\mathcal{L}(\mathcal{M})$.
- d) Nach ([22] 1.4.6) ist in einer Banachalgebra ein Element T invertierbar, falls es ein invertierbares Element S in der Banachalgebra gibt mit $\|T - S\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}$

Wegen:

$$\bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{t \in [0, 1]} \|F_1(t, k) - f(k)\| = \|t \cdot \chi_{1,G} \circ f(k) \circ \chi_{E,E}\|$$

$$< \varepsilon = \frac{1}{\|f(k)^{-1}\|}$$

und da $f(k) \in \mathcal{G}(\mathcal{M})$ für alle $k \in K$ gilt, folgt daraus die Invertierbarkeit von $F_1(t, k)$ für alle $k \in K, t \in [0, 1]$.
Damit ist Satz 3.1. in allen Teilen bewiesen. ■

§ 4 Verformung von $\pi_{1,G;E,E}^{\circ}$ nach $\mathcal{G}_{E,E}$

Ziel dieses Paragraphen ist der folgende Satz

Satz 4.1.

Sei $\mathcal{M}$ von Neumannsche Algebra, K topologischer Raum
 $E, G \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit $EG = 0$, $E \sim G \sim 1$ und sei $f: K \rightarrow \pi_{1,G;E,E}^{\circ}$
 stetig. Dann gibt es eine stetige Abbildung $F_2: K \times [0,1] \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$
 mit:

$$(4.1.) \quad \bigwedge_{k \in K} F_2(0,k) = f(k) \wedge F_2(1,k) \in \mathcal{G}_{E,E}$$

Für den Beweis dieses Satzes sind die speziellen Eigenschaften von E, G von entscheidender Bedeutung, denn sie erlauben die Konstruktion eines "Drehoperators H ", der die "von $\mathcal{M} \cdot G$ und $E \cdot \mathcal{M} \cdot E$ aufgespannte Ebene um 90° dreht", und der bei der Konstruktion dieser Homotopie benötigt wird:

Hilfssatz 4.2.

Seien $E, G \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit $E \cdot G = 0$, $E \sim G \sim 1$.

Dann gibt es eine Abbildung $H \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ mit:

$$(4.2.) \quad \begin{aligned} & a) H \cdot (\chi_{E,E} + \chi_{1,G}) = (\chi_{E,E} + \chi_{1,G}) \cdot H = H \\ & b) H \cdot \chi_{E,E} = \chi_{1,G} \cdot H; \quad H \cdot \chi_{1,G} = \chi_{E,E} \cdot H \\ & c) H^2 = -(\chi_{E,E} + \chi_{1,G}) \end{aligned}$$

Beweis:

Wegen $E \sim G \sim 1$ gibt es partielle Isometrien U_E, U_G mit

$$(4.3.) \quad U_E \cdot U_E^* = E; \quad U_E^* \cdot U_E = U_G^* \cdot U_G = 1; \quad U_G \cdot U_G^* = G$$

Mit ihrer Hilfe können wir Abbildungen $H_0, H_0' \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ wie folgt angeben:

$$(4.4.) \quad \bigwedge_{T \in \mathcal{M}} H_0(T) := U_E^* T U_E U_G^* ; \quad \bigwedge_{T \in \mathcal{M}} H'_0(T) := U_E T U_G U_E^*$$

Es folgt sofort aus der Definition von H_0 bzw. H'_0

$$(4.5.) \quad \bigwedge_{T \in \mathcal{M}} H_0(T) = H_0(ETE) \cdot G \text{ bzw. } H_0 = \chi_{1,G} \circ H_0 \circ \chi_{E,E}$$

$$\bigwedge_{T \in \mathcal{M}} H'_0(T) = E \cdot H'_0(T \cdot G) \cdot E \text{ bzw. } H'_0 = \chi_{E,E} \circ H'_0 \circ \chi_{1,G}$$

wenn man $U_E = EU_E$; $U_E^* = U_E^* E$; $U_G = GU_G$; $U_G^* = U_G^* G$ beachtet.

Ferner rechnet man leicht nach:

$$(4.6.) \quad H_0 \circ H'_0 = \chi_{1,G} \quad H'_0 \circ H_0 = \chi_{E,E} ; \text{ denn:}$$

$$H'_0 \circ H_0(T) = H'_0(U_E^* T U_E U_G^*) = U_E U_E^* T U_E U_G^* U_G U_E^* = ETE = \chi_{E,E}(T)$$

$$H_0 \circ H'_0(T) = H_0(U_E T U_G U_E^*) = U_E^* U_E T U_G U_E^* U_E U_G^* = T \cdot G = \chi_{1,G}(T)$$

Setzt man $H := -H_0 + H'_0$ so folgt (4.2.); denn wegen

$E \cdot G = 0$ folgt $\chi_{1,G} \circ \chi_{E,E} = \chi_{E,E} \circ \chi_{1,G} = 0$ und damit:

$$a) \quad H \circ (\chi_{E,E} \circ \chi_{1,G}) = (-\chi_{1,G} \circ H_0 \circ \chi_{E,E} + \chi_{E,E} \circ H'_0 \circ \chi_{1,G}) \circ (\chi_{E,E} \circ \chi_{1,G})$$

$$= -\chi_{1,G} \circ H_0 \circ \chi_{E,E} \circ \chi_{E,E} \circ \chi_{1,G} + \chi_{E,E} \circ H'_0 \circ \chi_{1,G} \circ \chi_{E,E} \circ \chi_{1,G} = H$$

Entsprechend rechnet man $(\chi_{E,E} + \chi_{1,G}) \circ H = H$ nach.

b) ergibt sich ebenso leicht durch Nachrechnen

$$c) \quad H^2 = (-\chi_{1,G} \circ H_0 \circ \chi_{E,E} + \chi_{E,E} \circ H'_0 \circ \chi_{1,G})^2$$

$$= -\chi_{1,G} \circ H_0 \circ \chi_{E,E} \circ H'_0 \circ \chi_{1,G} - \chi_{E,E} \circ H'_0 \circ \chi_{1,G} \circ H_0 \circ \chi_{E,E}$$

$$= -H_0 \circ H'_0 - H'_0 \circ H_0$$

$$= -\chi_{1,G} - \chi_{E,E}$$

Die Angabe der Homotopie F_2 aus Satz 4.1. vollzieht sich durch die Angabe von drei Homotopien F_2', F_2'', F_2''' , deren Hintereinanderausführung schließlich die Homotopie F_2 ergibt.

Hilfssatz 4.3.

Seien $E, G \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $E \cdot G = 0$ und $E \sim G \sim 1$, K topologischer Raum und $f : K \longrightarrow \prod_{1, G; E, E}^0$ stetig.

Dann gibt es eine stetige Abbildung $F_2' : [0, 1] \times K \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ mit:

$$(4.7.) \bigwedge_{k \in K} F_2'(0, k) = f(k) \wedge F_2'(1, k) \circ \chi_{E, E} = H \circ \chi_{E, E}$$

Dabei ist H die in Hilfssatz 4.2. angegebene Abbildung.

Beweis:

Der Beweis wird durch Angabe der Homotopie und Nachweis der geforderten Eigenschaften geführt. Wegen $E \cdot G = 0$, $E \sim G \sim 1$ gibt es ein $H \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, das die Gleichungen (4.2.) erfüllt.

Ich setze:

$$F_2'(t, k) := (1 - \chi_{1, G}) \circ f(k) - f(k) \circ \chi_{E, E} \circ f(k)^{-1} \circ (1 - \chi_{1, G}) \circ f(k)$$

$$(4.8.) \quad + (1-t) \cdot [f(k) \circ \chi_{E, E} \circ f(k)^{-1} \circ (1 - \chi_{1, G}) \circ f(k) + \chi_{1, G} \circ f(k)] \\ + t \cdot [H \circ \chi_{E, E} \circ f(k)^{-1} \circ (1 - \chi_{1, G}) \circ f(k) + f(k) \circ H \circ \chi_{1, G} \circ f(k)]$$

Dann gilt:

- 1) Die Stetigkeit von F_2' folgt aus der Stetigkeit der Operationen in $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ und der Stetigkeit der Inversenbildung ([22] 1.4.8).
- 2) $\bigwedge_{k \in K} F_2'(0, k) = (1 - \chi_{1, G}) \circ f(k) + \chi_{1, G} \circ f(k) = f(k)$

3) Wegen $f(k) \in \prod_{1,G;E,E}^a$ für $k \in K$ folgt:

$$\bigwedge_{k \in K} F'_2(1,k) \circ \chi_{E,E} = f(k) \circ \chi_{E,E} - f(k) \circ \chi_{E,E} + H \circ \chi_{E,E} \\ = H \circ \chi_{E,E}$$

4) Es ist noch zu zeigen: $\bigwedge_{k \in K, t \in [0,1]} F'_2(t,k) \in \mathcal{G}(\mathcal{M})$

Um dies nachzuweisen, geben wir zu jedem $t \in [0,1], k \in K$ die zu $F'_2(t,k)$ inverse Abbildung $\tilde{F}'_2(t,k) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ an.

Ich setze:

$$\tilde{F}'_2(t,k) = f(k)^{-1} \cdot \left[(1 - \chi_{1,G}) \circ f(k) \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1 - \chi_{1,G}) \right. \\ \left. + \frac{1-t}{t^2 + (1-t)^2} \cdot f(k) \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1 - \chi_{1,G}) + \frac{1-t}{t^2 + (1-t)^2} \cdot \chi_{1,G} \right. \\ \left. - \frac{t}{t^2 + (1-t)^2} \cdot (H \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1 - \chi_{1,G}) + f(k) \circ H \circ \chi_{1,G}) \right]$$

Daß das so definierte $\tilde{F}'_2(t,k) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ ist offensichtlich.

Daß es sich dabei tatsächlich um die zu $F'_2(t,k)$ inverse Abbildung handelt, ergibt eine mühsame Rechnung, die hier nur skizziert werden soll.

$$\tilde{F}'_2(t,k) \circ F'_2(t,k) \\ = f(k)^{-1} \cdot \left[-t \cdot f(k) \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1 - \chi_{1,G}) + \frac{t^2}{t^2 + (1-t)^2} \cdot H \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1 - \chi_{1,G}) \right. \\ \left. + (1 - \chi_{1,G}) + t \cdot (1 - \chi_{1,G}) \circ f(k) \circ H \circ \chi_{1,G} - (1-t) \cdot f(k) \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1 - \chi_{1,G}) \right. \\ \left. - t \cdot f(k) \circ \chi_{E,E} \circ H \circ \chi_{1,G} + \frac{(1-t)^2}{t^2 + (1-t)^2} \cdot f(k) \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1 - \chi_{1,G}) \right. \\ \left. + \frac{t(1-t)}{t^2 + (1-t)^2} \cdot f(k) \circ \chi_{E,E} \circ H \circ \chi_{1,G} + \frac{(1-t)^2}{t^2 + (1-t)^2} \cdot \chi_{1,G} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{t(1-t)}{t^2+(1-t)^2} \cdot \chi_{1,G} \circ H \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1-\chi_{1,G}) - \frac{t}{t^2+(1-t)^2} \cdot H \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1-\chi_{1,G}) \\
 & - \frac{t^2}{t^2+(1-t)^2} \cdot H \circ \chi_{E,E} \circ H \circ \chi_{1,G} - \frac{t(1-t)}{t^2+(1-t)^2} \cdot f(k) \circ H \circ \chi_{1,G} \\
 & - \frac{t^2}{t^2+(1-t)^2} \cdot f(k) \circ H \circ \chi_{1,G} \circ H \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1-\chi_{1,G}) \Big] \circ f(k) \\
 & = f^{-1}(k) \cdot \left[1 + \frac{t}{t^2+(1-t)^2} \cdot \chi_{1,G} \circ H \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1-\chi_{1,G}) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{t}{t^2+(1-t)^2} \cdot H \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \cdot (1-\chi_{1,G}) \right] \circ f(k)
 \end{aligned}$$

= 1

Entsprechend rechnet man:

$$F'_2(t,k) \circ \tilde{F}'_2(t,k) = 1$$

Damit ist die Invertierbarkeit von $F_2(t,k)$ für alle $t \in [0,1]$, $k \in K$ bewiesen. ■

Hilfssatz 4.4.

Seien $E, G \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit $E \circ G = 0$, $E \circ G \sim 1$, K topologischer Raum und $f: K \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ stetig.

Sei weiter $H \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ wie in Hilfssatz 4.2. angegeben und es

$$\text{gelte: } \bigwedge_{k \in K} f(k) \circ \chi_{E,E} = H \circ \chi_{E,E}$$

Dann gibt es eine stetige Abbildung $F''_2: [0,1] \times K \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ mit:

$$(4.9.) \quad \bigwedge_{k \in K} F''_2(0,k) = f(k) \wedge F''_2(1,k) \in \mathcal{G}'_{E,E}$$

Beweis:

Ich setze:

$$F_2''(t, k) := (1 - \chi_{E, E} - \chi_{1, G}) \circ f(k) + (1 - t)(\chi_{E, E} + \chi_{1, G}) \circ f(k)$$

$$- t \cdot H \circ f(k)$$

Dann gilt:

1) Die Stetigkeit ergibt sich aus der Stetigkeit der Operationen in $\mathcal{L}(\mathcal{M})$.

$$2) \bigwedge_{k \in K} F_2''(0, k) = (1 - \chi_{E, E} - \chi_{1, G}) \circ f(k) + (\chi_{E, E} + \chi_{1, G}) \circ f(k) = f(k)$$

$$3) \bigwedge_{k \in K} F_2''(1, k) \circ \chi_{E, E} = f(k) \circ \chi_{E, E} - \chi_{E, E} \circ f(k) \cdot \chi_{E, E} - H \circ f(k) \cdot \chi_{E, E}$$

$$= H \circ \chi_{E, E} - \chi_{E, E} \circ H \circ \chi_{E, E} - H^2 \circ \chi_{E, E}$$

$$= -H^2 \circ \chi_{E, E} = (\chi_{E, E} + \chi_{1, G}) \circ \chi_{E, E}$$

$$= \chi_{E, E}$$

$$4) \text{ Bleibt zu zeigen: } \bigwedge_{\substack{k \in K \\ t \in [0, 1]}} F_2''(t, k) \in \mathcal{G}(\mathcal{M})$$

Wieder geben wir zu jedem $k \in K$, $t \in [0, 1]$ das inverse Element an. Ich setze:

$$\tilde{F}_2''(t, k) := f(k)^{-1} \left[(1 - \chi_{E, E} - \chi_{1, G}) + \frac{1-t}{t^2 + (1-t)^2} (\chi_{E, E} + \chi_{1, G}) + \frac{t}{t^2 + (1-t)^2} H \right]$$

Damit folgt unter Berücksichtigung von (4.2.):

$$F_2''(t, k) \circ \tilde{F}_2''(t, k)$$

$$= \left[(1 - \chi_{E, E} - \chi_{1, G}) + (1 - t)(\chi_{E, E} + \chi_{1, G}) - t \cdot H \right] \circ f(k) \circ f(k)^{-1} \\ \cdot \left[(1 - \chi_{E, E} - \chi_{1, G}) + \frac{1-t}{t^2 + (1-t)^2} (\chi_{E, E} + \chi_{1, G}) + \frac{t}{t^2 + (1-t)^2} H \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - \chi_{E,E} - \chi_{1,G}) + \frac{t}{t^2 + (1-t)^2} (1 - \chi_{E,E} - \chi_{1,G}) \cdot H + \frac{(1-t)^2}{t^2 + (1-t)^2} (\chi_{E,E} + \chi_{1,G}) \\
 &+ \frac{t(1-t)}{t^2 + (1-t)^2} (\chi_{E,E} + \chi_{1,G}) \cdot H - t \cdot H \cdot (1 - \chi_{E,E} - \chi_{1,G}) - \frac{t(1-t)}{t^2 + (1-t)^2} 2^H (\chi_{E,E} + \chi_{1,G}) \\
 &\quad - \frac{t^2}{t^2 + (1-t)^2} \cdot H^2
 \end{aligned}$$

$$= (1 - \chi_{E,E} - \chi_{1,G}) + (\chi_{E,E} + \chi_{1,G}) = 1$$

Entsprechend leicht rechnet man: $\tilde{F}_2''(t, k) \circ F_2''(t, k) = 1$.

Damit ist die Invertierbarkeit von $F_2''(t, k)$ für alle $k \in K$, $t \in [0, 1]$ gezeigt. ■

Hilfssatz 4.5.

Sei $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ und K topologischer Raum. Ferner sei $f : K \longrightarrow \mathcal{G}'_{E,E}$ stetig.

Dann gibt es eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned}
 F_2''' : [0, 1] \times K &\longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M}) \quad \text{mit} \\
 \bigwedge_{k \in K} F_2'''(0, k) &= f(k) \quad \wedge \quad F_2'''(1, k) \in \mathcal{G}_{E,E}
 \end{aligned}$$

Beweis:

Ich setze:

$$F_2'''(t, k) := f(k) - t \cdot \chi_{E,E} \circ f(k) \circ (1 - \chi_{E,E})$$

Dann gilt:

- 1) Die Stetigkeit von F_2''' ist offensichtlich.
- 2) $\bigwedge_{k \in K} F_2'''(0, k) = f(k)$
- 3) $\bigwedge_{k \in K} \chi_{E,E} \circ F_2'''(1, k) = \chi_{E,E} \circ f(k) - \chi_{E,E} \circ f(k) \circ (1 - \chi_{E,E})$
 $\quad = \chi_{E,E} \circ f(k) - \chi_{E,E} \circ f(k) + \chi_{E,E}$
 $\quad = \chi_{E,E} \quad \text{und}$

$$\bigwedge_{k \in K} F_2'''(1, k) \circ \chi_{E,E} = f(k) \circ \chi_{E,E} = \chi_{E,E}$$

Wieder wird die Invertierbarkeit von F_2''' für alle $k \in K$ und $t \in [0,1]$ durch Angabe des inversen Elements nachgewiesen. Ich setze:

$$\tilde{F}_2'''(t,k) := f^{-1}(k) - t \cdot \chi_{E,E} \circ f^{-1}(k) \circ (1 - \chi_{E,E})$$

Dann gilt für alle $k \in K$, $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} F_2'''(t,k) \circ \tilde{F}_2'''(t,k) &= [f(k) - t \chi_{E,E} \circ f(k) \circ (1 - \chi_{E,E})] \circ [f(k)^{-1} \\ &\quad - t \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \circ (1 - \chi_{E,E})] \\ &= 1 - t \chi_{E,E} \circ f(k) \circ (1 - \chi_{E,E}) \circ f(k)^{-1} - t f(k) \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \circ (1 - \chi_{E,E}) \end{aligned}$$

Wegen $f(k) \in \mathcal{G}'_{E,E}$ und damit also auch $f(k)^{-1} \in \mathcal{G}'_{E,E}$ gilt aber:

$$-t \chi_{E,E} \circ f(k) \circ (1 - \chi_{E,E}) \circ f(k)^{-1} = -t [\chi_{E,E} - \chi_{E,E} f(k)^{-1}]$$

und

$$-t f(k) \circ \chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} \circ (1 - \chi_{E,E}) = -t [\chi_{E,E} \circ f(k)^{-1} - \chi_{E,E}]$$

und damit folgt: $F_2'''(t,k) \circ \tilde{F}_2'''(t,k) = 1$

und aus Symmetriegründen folgt ebenfalls:

$$\tilde{F}_2'''(t,k) \circ F_2'''(t,k) = 1$$

Beweis von Satz 4.1.

Sei also $f : K \longrightarrow \prod_{1,G;E,E}^{\circ}$ stetig gegeben. Nach Hilfssatz 4.3. gibt es dann zu f eine Homotopie F_2' mit:

$$\bigwedge_{k \in K} F_2'(0,k) = f(k) \wedge F_2'(1,k) \circ \chi_{E,E} = H \circ \chi_{E,E}$$

Nach Hilfssatz 4.4. gibt es weiter zu $F_2'(1,k)$ eine Homotopie F_2'' mit:

$$\bigwedge_{k \in K} F_2''(0, k) = F_2'(1, k) \wedge F_2''(1, k) \in \mathcal{G}'_{E, E}$$

und weiter gibt es nach Hilfssatz 4.5 zu $F_2''(1, k)$ eine Homotopie F_2''' mit

$$\bigwedge_{k \in K} F_2'''(0, k) = F_2''(1, k) \wedge F_2'''(1, k) \in \mathcal{G}_{E, E}.$$

Mit

$$F_2(t, k) := \begin{cases} F_2'(3t, k) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ F_2''(3t-1, k) & \text{für } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ F_2'''(3t-2, k) & \text{für } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ist damit die Homotopie F_2 des Satzes 4.1 gefunden.

§ 5 Verformung von $\mathcal{G}_{E,E}$ nach $\text{Id}_{\mathcal{M}}$

Satz 5.1.

Sei $\mathcal{M}$ eigentlich unendliche von Neumannsche Algebra, $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit $1-E \sim E \sim 1$, K metrischer, kompakter Raum und sei

$f : K \rightarrow \mathcal{G}_{E,E}$ stetig.

Dann gibt es eine Abbildung $F_3 : [0,1] \times K \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ mit

$$(5.1.) \quad \bigwedge_{k \in K} F_3(0,k) = f(k) \wedge F_3(1,k) = \text{Id}_{\mathcal{M}}$$

Ich werde zunächst einige Hilfssätze beweisen, in denen die Abbildungen bereitgestellt werden, die zur Definition der Homotopie F_3 benötigt werden, und in denen deren entscheidende Eigenschaften bewiesen werden.

Insbesondere sind dies die Abbildungen $u^{1,j}$ in Definition 5.5.

Hilfssatz 5.2.

Für $\phi \in \mathcal{G}_{E,E}$ gilt

$$a) \quad \phi \circ (1 - \chi_{E,E}) = (1 - \chi_{E,E}) \circ \phi = (1 - \chi_{E,E}) \circ \phi \circ (1 - \chi_{E,E})$$

$$b) \quad \phi = \chi_{E,E} + (1 - \chi_{E,E}) \circ \phi \circ (1 - \chi_{E,E})$$

$$c) \quad (1 - \chi_{E,E}) \circ \phi \circ (1 - \chi_{E,E}) \circ \phi^{-1} \circ (1 - \chi_{E,E}) = (1 - \chi_{E,E})$$

Beweis:

$$a) \quad \phi \circ (1 - \chi_{E,E}) = \phi - \phi \circ \chi_{E,E} = \phi - \chi_{E,E} \circ \phi = (1 - \chi_{E,E}) \circ \phi$$

$$b) \quad \phi = \phi \circ (\chi_{E,E} + (1 - \chi_{E,E})) = \chi_{E,E} + (1 - \chi_{E,E}) \circ \phi \circ (1 - \chi_{E,E})$$

c) folgt sofort aus a)

■

Hilfssatz 5.3.

Sei $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich und $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit $1 \sim E \sim 1 - E$ und sei $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \sim 1$ und $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$ für $i, j \in \mathbb{N}$. Setzt man ferner abkürzend:

$\chi_0 := 1 - \chi_{E,E}$; $\chi_i := \chi_{E_i, E_i}$, so gibt es zu $i = 0, 1, 2, \dots$

lineare Abbildungen

$$\psi_i : \chi_0(\mathcal{M}) \longrightarrow \chi_i(\mathcal{M})$$

$$\psi_i^{-1} : \chi_i(\mathcal{M}) \longrightarrow \chi_0(\mathcal{M})$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) $\bigwedge_{i=0,1,2,\dots} \psi_i$ ist stetig und ψ_i^{-1} ist stetig bezüglich der Norm- und der starken Topologie.

2) $\bigwedge_{i=0,1,2,\dots} \psi_i \circ \psi_i^{-1} = \chi_i$, $\psi_i^{-1} \circ \psi_i = \chi_0$; $\psi_0 = \chi_0$

(5.2.) 3) $\bigwedge_{i=0,1,2,\dots} \psi_i = \chi_i \circ \psi_i = \psi_i \circ \chi_0$ und

$$\psi_i^{-1} = \psi_i^{-1} \circ \chi_i = \chi_0 \circ \psi_i^{-1}$$

4) $\psi_i^{-1} \circ \psi_j = \delta_{ij} \psi_i^{-1} \circ \psi_j$ für $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\chi_i \circ \psi_j = \delta_{ij} \circ \psi_j \quad \text{und} \quad \psi_j^{-1} \circ \chi_i = \delta_{ij} \circ \psi_j^{-1}$$

für $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$

5) $\|\psi_j\| \leq 2$ und $\|\psi_j^{-1}\| \leq 2$ für $j = 0, 1, 2, \dots$

Bemerkung:

Die Existenz solcher "Isomorphismen" von $\chi_0(\mathcal{M})$ auf $\chi_1(\mathcal{M})$ und damit auch die Existenz von "Isomorphismen" von $\chi_1(\mathcal{M})$ auf $\chi_j(\mathcal{M})$ ist von entscheidender Bedeutung für die Durchführung des Eilenberg Swindel. Sie ermöglichen ein "Wegdrehen" von $\chi_0 \circ f(k) \circ \chi_0$ in die unendlich vielen $\chi_1(\mathcal{M})$ hinein.

Beweis:

Da $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich ist, ergibt sich als einfache Konsequenz aus Hilfssatz 2.1. die Existenz von Projektionen G_1, G_2 mit $G_1 \cdot G_2 = 0$ und $G_1 \sim G_2 \sim 1$

$$(\text{Setze: } G_1 := \sum_{i=1}^{\infty} E_{2i} \quad , \quad G_2 := \sum_{i=1}^{\infty} E_{2i-1})$$

Zur Definition der Abbildungen ψ_i, ψ_i^{-1} benutze ich die folgenden partiellen Isometrien, deren Existenz aus den Äquivalenzeigenschaften der Projektionen folgt:

$$\begin{aligned} U_{E_1} : \mathcal{H} &\longrightarrow E_1(\mathcal{H}) \text{ mit } U_{E_1} \cdot U_{E_1}^* = E_1, U_{E_1}^* \cdot U_{E_1} = 1 \text{ für } i \in \mathbb{N} \\ U_{G_1} : \mathcal{H} &\longrightarrow G_1(\mathcal{H}) \text{ mit } U_{G_1} \cdot U_{G_1}^* = G_1, U_{G_1}^* \cdot U_{G_1} = 1 \text{ für } i=1,2 \\ U_{E'} : \mathcal{H} &\longrightarrow (1-E)(\mathcal{H}) \text{ mit } U_{E'} \cdot U_{E'}^* = 1-E, U_{E'}^* \cdot U_{E'} = 1 \end{aligned}$$

Damit definieren wir zunächst die folgenden linearen Abbildungen (von $\chi_1(\mathcal{M})$ nach $\mathcal{M}$ und umgekehrt):

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} \bigwedge_{T \in \mathcal{M}} \psi_1'(T) &:= U_{E_1} \cdot T \cdot U_{E_1}^* ; \quad \psi_1''(T) := U_{E_1}^* \cdot T \cdot U_{E_1} \\ (5.3) \quad \bigwedge_{T \in \mathcal{M}} \psi_0'(T) &:= U_{E'} \cdot U_{G_1}^* \cdot T \cdot U_E^* + U_{G_2}^* \cdot T \cdot U_{E'}^* \\ \bigwedge_{T \in \mathcal{M}} \psi_0''(T) &:= U_{G_1} \cdot U_{E'}^* \cdot T \cdot U_E + U_{G_2} \cdot T \cdot U_{E'} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Dabei erklären sich die Abbildungen ψ'_0, ψ''_0 leicht aus der folgenden Überlegung:

$$1 - \chi_{E,E} = \chi_{1-E,E} + \chi_{1,1-E} \sim \chi_{G_1,1} + \chi_{G_2,1} = 1,$$

wobei die durch das Zeichen $\sim$ angedeutete Äquivalenz eine der Art ist, wie sie in den Abbildungen ψ'_i, ψ''_i $i \in \mathbb{N}$ beschrieben wird.

Aus der Stetigkeit der algebraischen Operationen in $\mathcal{A}$ folgt sofort die Stetigkeit der Abbildungen ψ'_1, ψ''_1 .

Ebenso leicht rechnet man die Richtigkeit der folgenden Gleichungen nach:

$$(5.4.) \quad \bigwedge_{i=0,1,2,\dots} \begin{aligned} \psi'_1 \circ \psi''_1 &= \chi_1; \quad \psi''_1 \circ \psi'_1 = 1 \\ \psi''_1 &= \psi''_1 \circ \chi_1; \quad \psi'_1 = \chi_1 \circ \psi'_1 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Abbildungen kann ich nun die in (5.2.) beschriebenen Abbildungen definieren.

Ich setze:

$$(5.5.) \quad \text{Für } j=0,1,2,\dots \quad \psi_j := \psi'_j \circ \psi''_0; \quad \psi_j^{-1} := \psi'_0 \circ \psi''_j$$

Es sind die Eigenschaften 1) - 5) zu überprüfen

zu 1) Die Stetigkeit ergibt sich aus der Stetigkeit der Abbildungen ψ'_1, ψ''_1

zu 2) Aus 5.4. ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=0,1,2,\dots} \quad & \psi_i \circ \psi_i^{-1} = \psi'_i \circ \psi''_0 \circ \psi'_0 \circ \psi''_i = \chi_i \\ & \psi_i^{-1} \circ \psi_i = \psi'_0 \circ \psi''_i \circ \psi'_i \circ \psi''_0 = \chi_0 \\ & \psi_0 = \psi'_0 \circ \psi''_0 = \chi_0 \end{aligned}$$

zu 3) Aus 5.4. ergibt sich:

$$\bigwedge_{i=0,1,2,\dots} \psi_i = \psi'_i \circ \psi''_0 = \chi_i \circ \psi'_i \circ \psi''_0 = \chi_i \circ \psi_i$$

$$= \psi'_i \circ \psi''_0 \circ \chi_0 = \psi_i \circ \chi_0$$

$$\bigwedge_{i=0,1,2,\dots} \psi_i^{-1} = \psi'_0 \circ \psi''_i = \chi_0 \circ \psi'_0 \circ \psi''_i = \chi_0 \circ \psi_i^{-1}$$

$$= \psi'_0 \circ \psi''_i \circ \chi_i = \psi_i^{-1} \circ \chi_i$$

zu 4) Ebenfalls aus 5.4. ergibt sich:

$$\begin{aligned} \psi_i^{-1} \circ \psi_j &= \psi'_0 \circ \psi''_i \circ \psi'_j \circ \psi''_0 = \psi'_0 \circ \psi''_i \circ \chi_i \circ \chi_j \circ \psi'_j \circ \psi''_0 \\ &= \delta_{ij} \psi'_0 \circ \psi''_i \circ \psi'_j \circ \psi''_0 = \delta_{ij} \psi_i^{-1} \circ \psi_j \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \chi_i \circ \psi_j &= \psi_i \circ \psi_i^{-1} \circ \psi_j = \delta_{ij} \circ \psi_j ; \psi_j^{-1} \circ \chi_i = \psi_j^{-1} \circ \psi_i \circ \psi_i^{-1} \\ &= \delta_{ij} \circ \psi_j^{-1} \end{aligned}$$

zu 5) Es gilt:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{T \in \mathcal{M}} \|\psi_i(T)\| &= \|\psi'_i \circ \psi''_0(T)\| \\ &= \|\psi'_i(U_{G_1} \cdot U_{E'}^* \cdot T \cdot U_E + U_{G_2} \cdot T \cdot U_{E'})\| \\ &= \|U_{E'} \cdot U_{G_1} \cdot U_{E'}^* \cdot T \cdot U_E U_{E_1}^* + U_{E_1} \cdot U_{G_2} \cdot T \cdot U_{E'} U_{E_1}^*\| \\ &\leq 2 \|T\| \end{aligned}$$

Damit folgt: $\|\psi_i\| \leq 2$ für $i=0,1,2,\dots$

Entsprechend leicht zeigt man: $\|\psi_i^{-1}\| \leq 2$ für $i=0,1,2,\dots$ ■

Zur Durchführung des Eilenberg Swindel muß man unendliche Reihen von Elementen aus $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ benutzen.

Der folgende Hilfssatz gibt Auskunft darüber, wann eine solche unendliche Reihe selbst wieder in $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ liegt.

Hilfssatz 5.4.

Sei $(F_i)_{i=1,2,\dots}$ eine orthogonale Familie von Projektionen

in $\mathcal{M}$ und $(\phi_i)_{i=1,2,\dots}$ eine abzählbare Teilmenge von

$\mathcal{L}(\mathcal{M})$ und gebe es ein $L \in \mathbb{R}$ mit: $\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} \|\phi_i\| \leq L$ und gelte

ferner für $i \in \mathbb{N}$ $\chi_{F_i, F_i} \circ \phi_i \circ \chi_{F_i, F_i} = \phi_i$.

Definiert man dann:

(5.6.) $\bigwedge_{T \in \mathcal{M}} (\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i)(T) := \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(T)$ so gilt:
 $\bigwedge_{T \in \mathcal{M}} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(T)$ konvergiert stark und $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$

Beweis:

Es ist zu beweisen: a) $\bigwedge_{T \in \mathcal{M}} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(T)$ konvergiert stark

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i$ ist stetig.

zu a) Sei $x \in \mathcal{H}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(T)(x) \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{F_i} \circ \phi_i \circ \chi_{F_i}(T)(x) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} F_i \cdot \phi_i(F_i \cdot T \cdot F_i) \cdot F_i(x) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|F_i \cdot \phi_i(F_i \cdot T \cdot F_i) \cdot F_i(x)\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\phi_i(F_i \cdot T \cdot F_i)\|^2 \|F_i(x)\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\phi_i\|^2 \|T\|^2 \|F_i(x)\|^2 \\ &= L^2 \|T\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \|F_i(x)\|^2 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck wird aber für hinreichend großes n kleiner als beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$.

Damit folgt: $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(T)$ ist stark konvergent für jedes $T \in \mathcal{M}$ und ist damit auch selbst in $\mathcal{M}$.

zu b) Für $T \in \mathcal{M}$ gilt nach a)

$$\sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(T)(x) \right\|^2 \leq \sup_{\|x\|=1} L^2 \|T\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \|F_i(x)\|^2 \leq L^2 \|T\|^2$$

Damit folgt: $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(T) \right\| \leq L \|T\|$ für alle $T \in \mathcal{M}$

und also ist $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i$ stetig. ■

Im folgenden werde ich Abbildungen $u^{i,j}: \mathcal{L}(\mathcal{M})_x [0,1] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M})$ definieren, die für die Angabe der Homotopien von $g_{E,E}$ nach $\text{Id}_{\mathcal{M}}$ von entscheidender Bedeutung sind, und in zwei Hilfssätzen einige Eigenschaften dieser Abbildungen beweisen, die für den Beweis von Satz 5.1. benötigt werden.

Definition 5.5.

Sei $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich und $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit $1 \sim E \sim 1-E$ und sei $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \sim 1$ und $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$ für $i, j \in \mathbb{N}$ und für $i=0,1,2,\dots$ seien ψ_i, ψ_i^{-1} die nach Hilfssatz 5.3. existierenden Abbildungen.

Zu $i, j \in \{0,1,2,\dots\}$ definiere ich dann Abbildungen

$u^{i,j}, \tilde{u}^{i,j}: \mathcal{L}(\mathcal{M})_x [0,1] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M})$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \bigwedge \\ \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}), t \in [0,1] \end{aligned} \quad (5.7.) \quad \begin{aligned} u^{i,j}(\phi, t) := & (\psi_i \circ \phi \circ \psi_i^{-1} + \psi_j \circ \phi^{-1} \circ \psi_j^{-1}) \cos^2 \frac{\pi t}{2} \\ & + (\chi_i + \chi_j) \sin^2 \frac{\pi t}{2} \\ & + (\psi_i \circ \phi \circ \psi_j^{-1} - \psi_i \circ \psi_j^{-1} + \psi_j \circ \psi_i^{-1} - \psi_j \circ \phi^{-1} \circ \psi_i^{-1}) \sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2} \end{aligned}$$

$$\bigwedge_{\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}), t \in [0, 1]} \tilde{u}^{1,j}(\phi, t) := (\psi_1 \circ \phi^{-1} \circ \psi_1^{-1} + \psi_j \circ \phi \circ \psi_j^{-1}) \cos^2 \frac{\pi t}{2} \\ + (\chi_1 + \chi_j) \sin^2 \frac{\pi t}{2} \\ + (-\psi_1 \circ \phi \circ \psi_j^{-1} + \psi_1 \circ \psi_j^{-1} - \psi_j \circ \psi_1^{-1} + \psi_j \circ \phi^{-1} \psi_1^{-1}) \\ \sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2}$$

Hilfssatz 5.6.

Sei $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich, $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit $1 \sim E \sim 1 - E$ und $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$, ferner seien die Abbildungen $u^{1,j}, \tilde{u}^{1,j}$ gemäß Definition 5.5. gegeben und $M \subset \mathcal{G}_{E,E}$ sei kompakt.

Dann gilt für $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $i \neq j$, $\phi, \phi' \in M$ und $t \in [0, 1]$:

a) $u^{1,j}(\phi, 1) = \chi_1 + \chi_j$

b) $u^{1,j}(\phi, 0) = \psi_1 \circ \phi \circ \psi_1^{-1} + \psi_j \circ \phi^{-1} \circ \psi_j^{-1}$

c) $u^{1,j}(\phi, t) \circ \tilde{u}^{1,j}(\phi, t) = \tilde{u}^{1,j}(\phi, t) \cdot u^{1,j}(\phi, t) = \chi_1 + \chi_j$

d) $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}} \|\phi - \phi'\| < \delta \wedge |t - t'| < \delta \implies \\ \|\tilde{u}^{1,j}(\phi, t) - \tilde{u}^{1,j}(\phi', t')\| < \varepsilon$

e) $u^{1,j}(\phi, t) = (\chi_1 + \chi_j) \circ u^{1,j}(\phi, t) = u^{1,j}(\phi, t) \circ (\chi_1 + \chi_j) \\ = (\chi_1 + \chi_j) \circ u^{1,j}(\phi, t) \circ (\chi_1 + \chi_j) \\ = \chi_{E_1 + E_j, E_1 + E_j} \circ u^{1,j}(\phi, t) \circ \chi_{E_1 + E_j, E_1 + E_j}$

$$\tilde{u}^{1,j}(\phi, t) = (\chi_1 + \chi_j) \tilde{u}^{1,j}(\phi, t) = \tilde{u}^{1,j}(\phi, t) \cdot (\chi_1 + \chi_j) \\ = (\chi_1 + \chi_j) \cdot \tilde{u}^{1,j}(\phi, t) \cdot (\chi_1 + \chi_j)$$

$$= \chi_{E_i + E_j, E_i + E_j} \cdot \tilde{u}^{i,j}(\phi, t) \cdot \chi_{E_i + E_j, E_i + E_j}$$

Beweis:

a) und b) ergibt sich sofort aus der Definition der $u^{i,j}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } u^{i,j}(\phi, t), \tilde{u}^{i,j}(\phi, t) &= \chi_i \cos^2 \frac{\pi t}{2} + \chi_j \cos^2 \frac{\pi t}{2} - \psi_i \circ \phi \circ \psi_j^{-1} \\ &\quad \sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2} \\ &\quad - \psi_j \circ \phi^{-1} \circ \psi_i^{-1} \sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2} + \chi_i \sin^2 \frac{\pi t}{2} \\ &\quad + \psi_i \circ \phi \circ \psi_j^{-1} \sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2} + \psi_j \circ \phi^{-1} \circ \psi_i^{-1} \\ &\quad \sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2} \\ &\quad + \chi_j \sin^2 \frac{\pi t}{2} \\ &= \chi_i + \chi_j \end{aligned}$$

Entsprechend leicht rechnet man nach:

$$\tilde{u}^{i,j}(\phi, t) \circ u^{i,j}(\phi, t) = \chi_i + \chi_j$$

d) Seien $\phi, \phi' \in M$, $t, t' \in [0, 1]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|u^{i,j}(\phi, t) - u^{i,j}(\phi', t)\| &= \|u^{i,j}(\phi, t) - u^{i,j}(\phi', t) + u^{i,j}(\phi', t) \\ &\quad - u^{i,j}(\phi', t')\| \\ &\leq \|u^{i,j}(\phi, t) - u^{i,j}(\phi', t)\| + \|u^{i,j}(\phi', t) - u^{i,j}(\phi', t')\| =: A + B \end{aligned}$$

Ich zeige nun, daß δ so gewählt werden kann, daß $A, B < \frac{\epsilon}{2}$ folgt.

Es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \|(\psi_i \circ \phi \circ \psi_i^{-1} + \psi_j \circ \phi^{-1} \circ \psi_j^{-1} - \psi_i \circ \phi' \circ \psi_i^{-1} - \psi_j \circ \phi'^{-1} \circ \psi_j^{-1}) \cos^2 \frac{\pi t}{2} \\ &\quad + (\psi_i \circ \phi \circ \psi_j^{-1} - \psi_j \circ \phi^{-1} \circ \psi_i^{-1} - \psi_i \circ \phi' \circ \psi_j^{-1} + \psi_j \circ \phi'^{-1} \circ \psi_i^{-1}) \cos \frac{\pi t}{2} \sin \frac{\pi t}{2}\| \end{aligned}$$

$$\leq \|\psi_i \circ (\phi - \phi') \circ \psi_i^{-1}\| + \|\psi_j \circ (\phi^{-1} - \phi'^{-1}) \circ \psi_j^{-1}\|$$

$$+ \|\psi_i \circ (\phi - \phi') \circ \psi_j^{-1}\| + \|\psi_j \circ (\phi^{-1} - \phi'^{-1}) \circ \psi_i^{-1}\|$$

$$\leq 8 (\|\phi - \phi'\| + \|\phi^{-1} - \phi'^{-1}\|)$$

$$\begin{aligned} B &= \|(\psi_i \circ \phi' \circ \psi_i^{-1} + \psi_j \circ \phi'^{-1} \circ \psi_j^{-1})(\cos^2 \frac{\pi t}{2} - \cos^2 \frac{\pi t'}{2}) \\ &+ (\chi_1 + \chi_j)(\sin^2 \frac{\pi t}{2} - \sin^2 \frac{\pi t'}{2}) + (\psi_i \circ \phi' \circ \psi_j^{-1} - \psi_i \circ \psi_j^{-1} \\ &+ \psi_j \circ \psi_i^{-1} - \psi_j \circ \phi'^{-1} \circ \psi_i^{-1})(\sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2} - \sin \frac{\pi t'}{2} \cos \frac{\pi t'}{2})\| \\ &\leq (4 \|\phi'\| + 4 \|\phi'^{-1}\|) |\cos^2 \frac{\pi t}{2} - \cos^2 \frac{\pi t'}{2}| + 2 |\sin^2 \frac{\pi t}{2} - \sin^2 \frac{\pi t'}{2}| \\ &+ (4 \|\phi'\| + 4 \|\phi'^{-1}\| + 8) |\sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2} - \sin \frac{\pi t'}{2} \cos \frac{\pi t'}{2}| \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Inversenbildung folgt:

1) $M \cup \{\phi^{-1} \mid \phi \in M\}$ ist kompakt und damit:

$$\bigvee_{L \in \mathbb{R}} \bigwedge_{\phi \in M} \|\phi\| \leq L \wedge \|\phi^{-1}\| \leq L$$

2) $\delta_1 > 0$ kann so gewählt werden, daß für $\phi, \phi' \in M$ aus

$$\|\phi - \phi'\| < \delta_1 \text{ folgt: } \|\phi^{-1} - \phi'^{-1}\| < \frac{\varepsilon}{32}$$

Wählt man ferner $\delta_2 > 0$ so, daß für $t, t' \in [0, 1]$ aus

$$|t - t'| < \delta_2 \text{ folgt: } |\cos^2 \frac{\pi t}{2} - \cos^2 \frac{\pi t'}{2}| < \frac{\varepsilon}{48} L \text{ und}$$

$$\begin{aligned} |\sin^2 \frac{\pi t}{2} - \sin^2 \frac{\pi t'}{2}| &< \frac{\varepsilon}{12} \text{ und } |\sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2} \\ &- \sin \frac{\pi t'}{2} \cos \frac{\pi t'}{2}| < \frac{\varepsilon}{48(L+1)} \end{aligned}$$

so folgt mit $\delta := \min \{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{32}\}$ für $\phi, \phi' \in M, t, t' \in [0, 1]$ aus $\|\phi - \phi'\| < \delta$ und $|t - t'| < \delta$:

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad A + B &< 8 \left(\frac{\varepsilon}{32} + \frac{\varepsilon}{32} \right) + 8L \frac{\varepsilon}{48L} + 2 \frac{\varepsilon}{12} + (8L+8) \frac{\varepsilon}{48(L+1)} \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

Damit ist d) bewiesen.

e) Unter Beachtung von Hilfssatz 2.1. und 5.3. folgt:

$$\begin{aligned}
 &(\chi_i + \chi_j) \circ u^{i,j}(\phi, t) \circ (\chi_i + \chi_j) \\
 &= (\chi_i + \chi_j) \circ [(\chi_i \circ \psi_i \circ \phi \circ \psi_i^{-1} \circ \chi_i + \chi_j \circ \psi_j \circ \phi^{-1} \circ \psi_j^{-1} \circ \chi_j) \cos^2 \frac{\pi t}{2} \\
 &\quad + (\chi_i + \chi_j) \sin^2 \frac{\pi t}{2} + (\chi_i \circ \psi_i \circ \phi \circ \psi_j^{-1} \circ \chi_j - \chi_i \circ \psi_i \circ \psi_j^{-1} \circ \chi_j \\
 &\quad \quad \quad + \chi_j \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1} \circ \chi_i \\
 &\quad \quad \quad - \chi_j \circ \psi_j \circ \phi^{-1} \circ \psi_i^{-1} \circ \chi_i) \sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2}] \circ (\chi_i + \chi_j) \\
 &= u^{i,j}(\phi, t)
 \end{aligned}$$

Entsprechend leicht rechnet man alle anderen Behauptungen nach. ■

Hilfssatz 5.7.

Sei $\mathcal{M}$ eigentlich unendlich und $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit $1-E \sim E \sim 1$ und $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ und sei $u^{i,j}, \tilde{u}^{i,j}$ gemäß Definition 5.5.

Ferner seien $(n_i)_{i=1,2,\dots}$ und $(m_j)_{j=1,2,\dots}$ zwei disjunkte Folgen mit paarweise verschiedenen Folgegliedern in $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Für $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, $t \in [0,1]$ gilt dann:

$$a) \quad \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}); \quad \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}); \quad \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{n_i} + \chi_{m_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \circ \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{n_i} + \chi_{m_i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{n_i} + \chi_{m_i} \circ \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) \circ \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{n_i} + \chi_{m_i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{n_i} + \chi_{m_i} \circ \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \circ \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{n_i} + \chi_{m_i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bigwedge_{i=0}^{\infty} \| u^{n_i, m_i}(\phi, t) \| &= \| (\psi_{n_i} \circ \phi \circ \psi_{n_i}^{-1} + \psi_{m_i} \circ \phi^{-1} \circ \psi_{m_i}^{-1}) \cos^2 \frac{\pi t}{2} \\ &\quad + (\chi_{n_i} + \chi_{m_i}) \sin^2 \frac{\pi t}{2} \\ &\quad + (\psi_{n_i} \circ \phi \circ \psi_{m_i}^{-1} - \psi_{n_i} \circ \psi_{m_i}^{-1} + \psi_{m_i} \circ \psi_{n_i}^{-1} \\ &\quad - \psi_{m_i} \circ \phi^{-1} \circ \psi_{n_i}^{-1}) \sin \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi t}{2} \| \\ &\leq 4 \| \phi \| + 4 \| \phi^{-1} \| + 2 + 4 \| \phi \| + 4 + 4 + 4 \| \phi^{-1} \| \\ &\leq 26 \max \{ \| \phi \|, \| \phi^{-1} \|, 1 \} \end{aligned}$$

Ferner gilt nach Hilfssatz 5.6.

$$u^{n_i, m_i}(\phi, t) = \chi_{E_{n_i} + E_{m_i}, E_{n_i} + E_{m_i}} \circ u^{n_i, m_i}(\phi, t) \chi_{E_{n_i} + E_{m_i}, E_{n_i} + E_{m_i}}$$

und damit folgt nach Hilfssatz 5.4.

$$\bigwedge \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}), t \in [0, 1] \quad \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$$

Entsprechend beweist man die Behauptung für

$$\sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{n_i} + \chi_{m_i}.$$

b) Sei $T \in \mathcal{M}$. Aus der starken Stetigkeit von $\chi_{n_i} + \chi_{m_i}$

für $i \in \mathbb{N}$ und der starken Konvergenz von

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\chi_{n_i} + \chi_{m_i})(T) \text{ folgt zusammen mit Hilfssatz 5.6:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \circ \sum_{j=1}^{\infty} (\chi_{n_j} + \chi_{m_j})(T) &= \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \circ (\chi_{n_i} + \chi_{m_i}) \\ &\quad \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\chi_{n_j} + \chi_{m_j})(T) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\chi_{n_i} + \chi_{m_i}) \circ (\chi_{n_j} + \chi_{m_j})(T) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) (\chi_{n_i} + \chi_{m_i})(T) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t)(T) \end{aligned}$$

$$\text{Damit folgt: } \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) \circ \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{n_j} + \chi_{m_j} = \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t)$$

Aus der starken Stetigkeit der χ_j und der starken Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t)(T)$ folgt entsprechend

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\chi_{n_i} + \chi_{m_i}) \circ \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t)$$

c) folgt wie b)

d) Ebenfalls aus der starken Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t)(T)$ und der starken Stetigkeit von $\chi_{n_i} + \chi_{m_i}$ für $i \in \mathbb{N}$ folgt

unter Beachtung von Hilfssatz 5.6. für $T \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) \circ \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t)(T) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) (\chi_{n_i} + \chi_{m_i}) \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\chi_{n_j} + \chi_{m_j}) \circ u^{n_i, m_i}(\phi, t)(T) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\chi_{n_i} + \chi_{m_i}) \circ (\chi_{n_j} + \chi_{m_j}) \circ u^{n_j, m_j}(\phi, t)(T) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) (u^{n_i, m_i}(\phi, t)(T)) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} (\chi_{n_i} + \chi_{m_i})(T)
 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{n_i, m_i}(\phi, t) \circ \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(\phi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{n_i} + \chi_{m_i}$$

Entsprechend rechnet man die zweite Behauptung nach! ■

Beweis von Satz 5.1.

Sei $f : K \longrightarrow \mathcal{G}_{E,E}$ stetig. Mit Hilfssatz 5.2. folgt:

$$\bigwedge_{k \in K} f(k) = \chi_{E,E} + \chi_0 \circ f(k) \circ \chi_0$$

Nach Hilfssatz 2.1. läßt sich $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \sim E$ und $E_i \cdot E_j = \delta_{ij} E_i$ zerlegen. Nach Hilfssatz 5.7. kann man daher $\chi_{E,E}$ wie folgt zerlegen:

$$\chi_{E,E} = (\chi_{E,E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i$$

und kann damit schreiben:

$$(5.11) \bigwedge_{k \in K} f(k) = (\chi_{E,E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \chi_0 \cdot f(k) \cdot \chi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i$$

Mit Hilfssatz 5.6. kann man auch schreiben:

$$(5.12) \bigwedge_{k \in K} f(k) = (\chi_{E,E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \chi_0 \cdot f(k) \cdot \chi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u^{2i, 2i-1}(f(k), 1)$$

Wegen Hilfssatz 5.7a) kann man nun sofort die beiden folgenden Homotopien

$$F'_3, F''_3 : [0, 1] \times K \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}) \text{ angeben:}$$

$$F'_3(t, k) := (\chi_{E,E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \chi_0 \cdot f(k) \cdot \chi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u^{2i, 2i-1}(f(k), t)$$

$$\begin{aligned} F''_3(t, k) &:= (\chi_{E,E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \sum_{i=0}^{\infty} u^{2i, 2i+1}(f(k), t) \\ &= (1 - \sum_{i=0}^{\infty} \chi_i) + \sum_{i=0}^{\infty} u^{2i, 2i+1}(f(k), t) \end{aligned}$$

Es gilt für alle $k \in K$:

$$F'_3(1, k) = f(k) \text{ nach (5.12.)}$$

$$\begin{aligned} F'_3(0, k) &= (\chi_{E,E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \chi_0 \cdot f(k) \cdot \chi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{2i-1} \cdot f(k) \cdot \psi_{2i-1}^{-1} \\ &\quad + \psi_{2i} \cdot f(k) \cdot \psi_{2i} \\ &= (\chi_{E,E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \psi_0 \cdot f(k) \cdot \psi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{2i-1} \cdot f(k) \cdot \psi_{2i-1}^{-1} \\ &\quad + \psi_{2i} \cdot f(k) \cdot \psi_{2i}^{-1} \\ &= (\chi_{E,E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{2i} \cdot f(k) \cdot \psi_{2i}^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{2i+1} \cdot f(k) \cdot \psi_{2i+1}^{-1} \\ F''_3(0, k) &= (\chi_{E,E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{2i} \cdot f(k) \cdot \psi_{2i}^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{2i+1} \cdot f(k) \cdot \psi_{2i+1}^{-1} \\ &= F'_3(0, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3''(1, k) &= \chi_{E, E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i + \sum_{i=0}^{\infty} \chi_{2i} + \chi_{2i+1} \\ &= \chi_0 + \chi_{E, E} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Mit

$$F_3(t, k) := \begin{cases} F_3'(1-2t, k) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_3''(2t-1, k) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ist damit die Abbildung gefunden, deren Existenz im Satz 5.1.

behauptet wird. Es bleibt zu zeigen:

a)

$$(5.13) \quad \bigwedge_{t \in [0, 1], k \in K} F_3(t, k) \in \mathcal{G}(\mathcal{M})$$

b)

$$(5.14) \quad F_3 : [0, 1] \times K \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}) \text{ ist stetig.}$$

Ich weise die Stetigkeit von F_3' bzw. F_3'' und die Invertierbarkeit von $F_3'(t, k)$ bzw. $F_3''(t, k)$ für alle $t \in [0, 1], k \in K$ nach.

Zu a) Ich weise die Invertierbarkeit von $F_3'(t, k)$ durch Angabe des inversen Elementes nach.

Sätze:

$$\bigwedge_{t \in [0, 1], k \in K} \tilde{F}_3'(t, k) := (\chi_{E, E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \chi_0 \circ f(k)^{-1} \chi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{2i, 2i-1}(f(k), t)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} &\tilde{F}_3'(t, k) \circ F_3'(t, k) \\ &= [(\chi_{E, E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \chi_0 \circ f(k)^{-1} \chi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{2i, 2i-1}(f(k), t)] \cdot [(\chi_{E, E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) \\ &\quad + \chi_0 \circ f(k)^{-1} \chi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u^{2i, 2i-1}(f(k), t)] \\ &= (\chi_{E, E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i) + \sum_{i=1}^{\infty} u^{2i, 2i-1}(f(k), t) - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \circ \sum_{i=1}^{\infty} u^{2i, 2i-1}(f(k), t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \chi_0 \circ f(k)^1 \circ \chi_0 \circ f(k) \circ \chi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{2i, 2i-1}(f(k), t) - \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{2i, 2i-1}(f(k), t) \circ \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \\
 & + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^{2i, 2i-1}(f(k), t) \circ \sum_{i=1}^{\infty} u^{2i, 2i-1}(f(k), t)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfssatz 5.2 und 5.7. folgt daraus:

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}'_3(t, k) \circ F'_3(t, k) &= \chi_{E, E} - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i + \chi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{2i} + \chi_{2i-1} \\
 &= \chi_{E, E} + \chi_0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Entsprechend folgt $F'_3(t, k) \circ \tilde{F}'_3(t, k) = 1$

Die Invertierbarkeit von F''_3 folgt entsprechend mit

$$\tilde{F}''_3(t, k) := (1 - \sum_{i=0}^{\infty} \chi_i) + \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{u}^{2i, 2i+1}(f(k), t)$$

Damit ist (5.12.) bewiesen.

b) Zum Nachweis der Stetigkeit ist nur die Stetigkeit einer Reihe der Form

$$\sum_{i=1}^{n_1, m_1} u^{n_1, m_1}(f(k), t)$$

zu beweisen, wobei $(n_i)_{i=1, 2, \dots}, (m_i)_{i=1, 2, \dots}$, wie in Hilfssatz 5.7. disjunkte Folgen mit paarweise verschiedenen Folgegliedern in $W \cup \{0\}$ sind.

Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Hilfssatz 5.6. und wegen der Kompaktheit von K und $[0, 1]$ kann $\delta > 0$ so gewählt werden, daß gilt:

$$\begin{aligned}
 (5.15) \quad \bigwedge_{i \in W} \bigwedge_{t, t' \in [0, 1], k, k' \in K} |t - t'| < \delta \wedge d(k, k') < \delta \Rightarrow \|u^{n_1, m_1}(f(k), t) \\
 - u^{n_1, m_1}(f(k'), t')\| < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Damit folgt für ein so gewähltes δ mit $F_1 := E_{n_1} + E_{m_1}$:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(f(k), t) - \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(f(k'), t') \right\|^2 \\
 &= \sup_{\|T\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} F_i u^{n_i, m_i}(f(k), t)(T) \cdot F_i - \sum_{i=1}^{\infty} F_i u^{n_i, m_i}(f(k'), t')(T) \cdot F_i \right\|^2 \\
 &= \sup_{\|T\|=1} \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} F_i u^{n_i, m_i}(f(k), t)(T) \cdot F_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} F_i u^{n_i, m_i}(f(k'), t')(T) \cdot F_i(x) \right\|^2 \\
 &= \sup_{\|T\|=1} \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} F_i u^{n_i, m_i}(f(k), t)(T) \cdot F_i(x) - F_i u^{n_i, m_i}(f(k'), t')(T) \cdot F_i(x) \right\|^2 \\
 &= \sup_{\|T\|=1} \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} F_i (u^{n_i, m_i}(f(k), t)(T) - u^{n_i, m_i}(f(k'), t')(T)) \cdot F_i(x) \right\|^2 \\
 &\leq \sup_{\|T\|=1} \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(f(k), t)(T) - u^{n_i, m_i}(f(k'), t')(T) \right\|^2 \|F_i(x)\|^2 \\
 &\leq \sup_{\|T\|=1} \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(f(k), t) - u^{n_i, m_i}(f(k'), t') \right\|^2 \|T\|^2 \|F_i(x)\|^2 \\
 &< \sup_{\|T\|=1} \sup_{\|x\|=1} \|T\|^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \|F_i(x)\|^2 \\
 &= \sup_{\|T\|=1} \sup_{\|x\|=1} \|T\|^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \|F_i(x)\|^2 \\
 &\leq \sup_{\|T\|=1} \sup_{\|x\|=1} \|T\|^2 \cdot \varepsilon^2 \|x\|^2 \\
 &= \varepsilon^2
 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\bigwedge_{k, k' \in K, t, t' \in [0, 1]} d(k, k') < \delta, |t - t'| < \delta \implies \left\| \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(f(k), t) - \sum_{i=1}^{\infty} u^{n_i, m_i}(f(k'), t') \right\| < \varepsilon$$

und damit folgt die Stetigkeit von F'_j .

Damit ist Satz 5.1. bewiesen. ■

§ 6 Beweise von Theorem 1 und Theorem 2

Beweis von Theorem 1

Sei $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und $f : S^i \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ stetig. Dann gibt es nach Satz 3.1. Projektionen E, G mit $E \sim 1$, $GE=0$, $G \neq 0$ und eine stetige Abbildung

$$(6.1) \quad \begin{aligned} &F_1 : S^i \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M}) \quad \text{mit} \\ &\bigwedge_{k \in S^i} F_1(k, 0) = f(k) \wedge F_1(k, 1) \in \prod_{1, G; E, E}^{\circ} \end{aligned}$$

Da $\mathcal{M}$ abzählbar zerlegbarer Faktor vom Typ III ist, folgt überdies: $E \sim G \sim 1$

Damit erfüllen S^i, E, G und $F_1(k, 1)$ die Voraussetzungen von Satz 4.1. und es folgt die Existenz einer stetigen Abbildung $F_2 : S^i \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ mit

$$(6.2) \quad \bigwedge_{k \in S^i} F_2(k, 0) = F_1(k, 1) \wedge F_2(k, 1) \in \mathcal{G}_{E, E}$$

Weiter erfüllen $S^i, F_2(k, 1), \mathcal{M}$ und E die Voraussetzungen von Satz 5.1. und damit folgt die Existenz einer Homotopie

$$F_3 : S^i \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M}) \quad \text{mit}$$

$$\bigwedge_{k \in S^i} F_3(k, 0) = F_2(k, 1) \wedge F_3(k, 1) = 1$$

mit

$$(6.3) \quad F(k, t) := \begin{cases} F_1(k, 3t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ F_2(k, 3t-1) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ F_3(k, 3t-2) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ist damit gezeigt, daß zu jedem $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und für jede stetige Abbildung $f : S^i \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$ gilt, daß sie homotop ist zur konstanten Abbildung mit dem Wert 1. Damit gibt es in jeder Homotopiegruppe nur ein Element und damit folgt:

$$\bigwedge_{i=0, 1, 2, \dots} \pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{M})) = \{0\}$$

Beweis von Theorem 2

Zunächst wird unter Anwendung von [17] , Lemma 4 (Fall $n=1$) bewiesen, daß $G(\mathcal{M})$ von einem CW - Komplex dominiert wird.

Um [17] , Lemma 4 anwenden zu können, ist zu zeigen, daß $G(\mathcal{M})$ ein parakompakter äqui-lokal konvexer Raum (E L C X Raum) ist.

Da $G(\mathcal{M})$ als offene Teilmenge eines Banachraumes ein metrischer Raum ist, ist $G(\mathcal{M})$ nach einem Satz von Stone auch parakompakt.

Um zu zeigen, daß $G(\mathcal{M})$ auch äqui-lokal konvex ist, haben wir die Existenz einer Umgebung U der Diagonalen

$\Delta \subset G(\mathcal{M}) \times G(\mathcal{M})$ und einer stetigen Abbildung

$$\lambda : U \times [0,1] \longrightarrow G(\mathcal{M})$$

zu beweisen mit folgenden Eigenschaften:

$$1. \bigwedge_{(\phi, \psi) \in U} \lambda((\phi, \psi), 0) = \phi \wedge \lambda((\phi, \psi), 1) = \psi$$

$$2. \bigwedge_{\phi \in G(\mathcal{M})} \bigwedge_{t \in [0,1]} \lambda((\phi, \phi), t) = \phi$$

3. Es gibt eine offene Überdeckung von $G(\mathcal{M})$ durch konvexe Mengen V_α , $\alpha \in A$, wobei A eine beliebige Indexmenge ist mit:

$$\bigwedge_{\alpha \in A} V_\alpha \times V_\alpha \subset U \wedge \lambda(V_\alpha \times V_\alpha \times [0,1]) = V_\alpha$$

Sei nun zu jedem $\phi \in G(\mathcal{M})$ eine konvexe Umgebung V_ϕ gewählt, die ganz in $G(\mathcal{M})$ liegt.

Dann setze:

$$U := \bigcup_{\phi \in G(\mathcal{M})} V_\phi \times V_\phi$$

U ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{G}(\mathcal{M}) \times \mathcal{G}(\mathcal{M})$ die $\triangle$ enthält, also eine Umgebung von $\triangle$

Setze ferner:

$$\lambda((\phi, \psi), t) := t\psi + (1-t)\phi$$

Dann gilt: a. $\lambda: U \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M})$; denn:

$$(\phi, \psi) \in U \implies \bigvee_{\Omega \in \mathcal{G}(\mathcal{M})} (\phi, \psi) \in v_{\Omega} \times v_{\Omega}$$

$$\implies \phi \in v_{\Omega} \wedge \psi \in v_{\Omega}$$

Da v_{Ω} konvex ist folgt damit:

$$\lambda((\phi, \psi), t) \in \mathcal{G}(\mathcal{M}) \text{ für } t \in [0, 1]$$

Wegen der Stetigkeit der Vektorraumoperationen folgt auch die Stetigkeit von λ .

- b. 1. und 2. folgt sofort aus der Definition von λ
c. 3. erfüllt sich, indem man als offene Über-

deckung durch konvexe Mengen die Menge

$$\{v_{\phi} \mid \phi \in \mathcal{G}(\mathcal{M})\} \text{ wählt.}$$

Dann gilt $v_{\phi} \times v_{\phi} \subset U$ nach Definition von U .

Außerdem gilt für beliebiges $\psi \in \mathcal{G}(\mathcal{M})$:

$$\phi \in v_{\psi} \implies \bigwedge_{t \in [0, 1]} \phi = t\phi + (1-t)\phi \in \lambda(v_{\psi} \times v_{\psi} \times [0, 1])$$

und

$$\phi \in \lambda(v_{\psi} \times v_{\psi} \times [0, 1]) \implies \bigvee_{\phi_1, \phi_2 \in v_{\psi}, t \in [0, 1]} \phi = t\phi_1 + (1-t)\phi_2$$

Da v_{ψ} konvex ist, folgt: $\phi \in v_{\psi}$

$$\text{Also: } \bigwedge_{\psi \in \mathcal{G}(\mathcal{M})} \lambda(v_{\psi} \times v_{\psi} \times [0, 1]) = v_{\psi}$$

Damit ist $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ als parakompakter E L C X Raum nachgewiesen, und also wird $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ von einem C W - Komplex dominiert.

Da weiterhin wegen $\pi_0(\mathcal{G}(\mathcal{M})) = \{0\}$ $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ zusammenhängend ist, läßt sich [26], Theorem 1 anwenden, das folgendes besagt:

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$, wobei X und Y beide zusammenhängende Räume sind, die von einem 1 bzw. m -dimensionalen (∞ zugelassen) C W - Komplex dominiert werden, ist genau dann eine Homotopie-Äquivalenz, wenn für alle

$1 \leq n < \max \{1, m\} + 1$ die induzierte Abbildung $f_*^n : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$ ein Isomorphismus ist.

Ich betrachte nun die Räume $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ und einen Einpunktraum $\{a\}$ und die Abbildung

$$f : \mathcal{G}(\mathcal{M}) \longrightarrow \{a\}$$

Da für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\pi_n(\mathcal{G}(\mathcal{M})) = 0 = \pi_n(\{a\})$, sind die induzierten Abbildungen f_*^n für alle $n \in \mathbb{N}$ trivialerweise Isomorphismen. Also ist die Abbildung f eine Homotopieäquivalenz und damit ist $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ als zusammenziehbar nachgewiesen. ■

Literatur

1. Araki, H., Smith, M.-S.B., Smith, L.: On the Homotopical Significance of the Type of von Neumann Algebra Factors. Commun. math. Phys. 22, 71-88 (1971)
2. Arlt, D.: Zusammenziehbarkeit der allgemeinen linearen Gruppe des Raumes c_0 der Nullfolgen, Inventiones math. 1, 36-44 (1966)
3. Breuer, M.: On the homotopy type of the group of regular elements of semifinite von Neumann algebras. Math. Ann. 185, 61-74 (1970)
4. Brüning, J., Willgerodt, W.: Eine Verallgemeinerung eines Satzes von N. Kuiper. Math. Ann. 220, 47-58 (1976)
5. Day, M.: Normed Linear Spaces. Springer-Verlag Berlin (1973)
6. Dixmier, J.: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algebres de von Neumann). Paris: Gauthiers-Villars 1967
7. Douady, A.: A Banach Space whose Linear Group is not connected. Indag. Math. 68, 787-789 (1965)
8. Douglas, R.G.: Banach Algebra Techniques in Operator Theory. Academic Press, New York and London 1972
9. Dunford, N. Schwartz, J.T.: Linear Operators. Interscience Publishers, Inc., New York 1958
10. Edelstein, I., Mitjagin, B., Semenov, E.: The Linear Groups C and L_1 are Contractible. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. 18, 27-33 (1970)
11. Hirzebruch, F., Scharlau, W.: Einführung in die Funktionalanalysis, B.I. Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut Mannheim

12. Hu, S.-T.: Homotopy Theory. Academic Press New York and London 1959
13. Jänich, K.: Vektorraumbündel und der Raum der Fredholm Operatoren. Math. Ann. 161, 129-142 (1965)
14. Kaplansky, J.: Rings of Operators. W.A. Benjamin, New York Amsterdam 1968
15. Kuiper, N.: The Homotopy Type of the Unitary Group of Hilbert Space. Topology, Vol. 3, 19-30 (1965)
16. Milyutin, A.A.: The Isomorphism of Spaces of Continuous Functions on Compact Spaces of the Power of the Continuum. Teor. Funktsii i Funktsional. Anal. 2, 150-156 (1966)
17. Milnor, J.: On Spaces having the Homotopy Type of a CW-Complex. Trans. Am. Math. Soc. 90, 272-280 (1959)
18. Mitjagin, B., Edelstein, I.: Homotopy Type of the Linear Groups of two Classes of Banach Spaces. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 4, 221-231 (1970)
19. Mitjagin, B.S.: The Homotopy Structure of the Linear Group of a Banach Space, Uspekhi Mat., Nauk 25, Nr. 5, 63-106 (1970). Auch: Russian Mathematical Surveys, 25, Nr. 5, 59-103 (1970)
20. Neubauer, G.: Der Homotopietyp der Automorphismengruppe in den Räumen l_p und c_0 . Math. Ann. 174, 33-40 (1967)
21. Pelczyński, A.: Projections in certain Banach spaces. Studia Mathematica, 19, 209-228 (1960)
22. Rickart, Charles E.: General Theory of Banach Algebras. Princeton, van Nostrand 1960
23. Sakai, S.: C^* -Algebras and W^* -Algebras. Springer-Verlag Berlin 1971

- 24. Schubert, H.: Topologie. B.G. Teubner Stuttgart 1964
- 25. Whitehead, G.W.: Homotopy Theory. M.I.T. Press Cambridge, Massachusetts and London, England 1966
- 26. Whitehead, J.H.C.: Combinatorial Homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. 55, 213-245 (1949)
- 27. Yosida, K.: Funktional Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1971

Lebenslauf

Am 29.11.1946 wurde ich als Sohn des Rechtsanwaltes und Notars Dr. Fritz Willgerodt und dessen Ehefrau Hildegard, geb. Faust in Göttingen geboren.

Von 1953 - 1957 besuchte ich zunächst die Volksschule und ab 1957 das Friedrichs-Gymnasium in Kassel. Dort legte ich am 16.2.1966 die Abiturprüfung ab.

Nach dreijähriger Dienstzeit bei der Bundeswehr begann ich im SS 1969 das Studium der Mathematik und Physik an der Philipps-Universität Marburg. Am 15.4.1971 bestand ich die Diplom-Vorprüfung und am 23.8.1974 die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik an der Philipps-Universität Marburg.

Seit dem 1.10.1974 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Herrn Prof. Dr. M. Breuer am Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg tätig.

